

Dana Simona BEREANU

Anca Ileana LUPAȘ

Silvia MARZAVAN

Simona ROATEȘI

Bogdan SEBACHER

Iuliana SPRINȚU

Roxana Gabriela DOBRE

MATEMATICĂ

*Culegere de probleme de tip grilă
pentru admiterea în învățământul superior*

ISBN 978-973-640-354-5

Editura Academiei Tehnice Militare “Ferdinand I”

București – 2025

PREFAȚĂ

Această lucrare se adresează viitorilor candidați la admiterea în Academia Tehnică Militară „Ferdinand I”, precum și tuturor elevilor de liceu care vor susține un examen de tip test grilă, la matematică.

Conținutul lucrării este în concordanță atât cu programa analitică stabilită pentru examenul de bacalaureat (profil M1) cât și cu cea prevăzută pentru examenul de admitere în Academia Tehnică Militară „Ferdinand I”.

Autorii au structurat această culegere pe capitole, conform materiei studiate în liceu, pentru a facilita recapitularea noțiunilor de bază. Fiecare problemă are 4 variante de răspuns, dintre care doar unul este corect. Gradul de dificultate al problemelor este diferit, de la simplu la complex, urmărindu-se verificarea atentă a noțiunilor de bază din programa de concurs.

Responsabilitatea pentru corectitudinea științifică a problemelor aparține în întregime autorilor, astfel:

- *Algebră clasa a IX-a și a X-a – lect. dr. Iuliana Sprințu*
- *Algebră clasa a XI-a – prof. dr. Simona Roateși*
conf. dr. Bogdan Sebacher
- *Algebră clasa a XII-a – conf. dr. Bogdan Sebacher*
lect. dr. Roxana Dobre
- *Analiză matematică – Limite și continuitate – conf. dr. Silvia Marzavan*
- *Analiză matematică – Derivabilitate – lect. dr. Anca Ileana Lupaș*
- *Analiză matematică – Integrabilitate – conf. dr. Dana Simona Bereanu*

Autorii au convingerea că această culegere de probleme vine în sprijinul viitorilor candidați la admiterea în Academia Tehnică Militară „Ferdinand I”, facilitându-le pregătirea pentru concurs.

Vă dorim mult SUCCES!

CUPRINS

PREFAȚĂ	2
ALGEBRĂ clasa a IX-a și a X-a	
Enunțuri.....	4
Soluții	11
ALGEBRĂ clasa a XI-a	
Enunțuri.....	23
Soluții	35
ALGEBRĂ clasa a XII-a	
Enunțuri.....	53
Soluții	63
ANALIZĂ MATEMATICĂ - Limite. Continuitate	
Enunțuri.....	78
Soluții	86
ANALIZĂ MATEMATICĂ - Derivabilitate	
Enunțuri.....	100
Soluții	110
ANALIZĂ MATEMATICĂ - Integrabilitate	
Enunțuri.....	128
Soluții	138
BIBLIOGRAFIE	151

ENUNȚURI
ALGEBRĂ clasa a IX-a și a X-a

1. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, pentru care se cunosc termenii $a_3 = 5$ și $a_7 = 21$. Atunci termenul a_{33} are valoarea:

a) 165; **b)** 145; **c)** 125; **d)** 25.

2. Valoarea lui $n \in \mathbb{N}$, pentru care C_n^0 , $\frac{C_n^1}{2}$ și $\frac{C_n^2}{4}$ sunt termenii succesivi ai unei progresii aritmetice este:

a) $n = 1$; **b)** $n = 8$; **c)** $n = 3$; **d)** $n = 4$.

3. Suma a trei numere aflate în progresie aritmetică este 12. Dacă se adaugă acestora numerele 1, 2, respectiv 11, progresia devine geometrică. Numerele sunt:

a) $\{5, 4, 7\}$ și $\{15, 14, 13\}$; **b)** $\{1, 4, 7\}$ și $\{17, 4, -9\}$; **c)** $\{6, 8, 10\}$ și $\{5, 8, 11\}$; **d)** $\{1, 3, 5\}$ și $\{17, 15, 13\}$.

4. Primul termen a_1 și rația r corespunzătoare unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, pentru care
$$\begin{cases} a_2 - a_6 + a_4 = -7 \\ a_8 - a_7 = 2 \cdot a_4 \end{cases}$$
, sunt:

a) $a_1 = -4$, $r = 3$; **b)** $a_1 = -4$, $r = 4$; **c)** $a_1 = -3$, $r = 1$; **d)** $a_1 = -5$, $r = 2$.

5. Suma S_{19} , a primilor 19 termeni ai progresiei aritmetice, pentru care $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$, este:

a) $S_{19} = 1034$; **b)** $S_{19} = 1063$; **c)** $S_{19} = 1065$; **d)** $S_{19} = 1064$.

6. Valoarea lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $2^x - 1$, 4^x și $2^{x+1} + 3$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice este:

a) $x = 1$; **b)** $x = 0$; **c)** $x \in \{\emptyset\}$; **d)** $x = 2$.

7. Cea mai mare valoare a numărului $n \in \mathbb{N}$, pentru care expresia $E = 1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^n$ este mai mică decât 10^3 este:

a) $n = 3$; **b)** $n = 5$; **c)** $n = 100$; **d)** $n = 10$.

8. Mulțimea valorilor lui $x \in \mathbb{Q}$, pentru care $5 - x$, $x + 7$ și $3x + 11$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, este:

a) $\{0, 3\}$; b) $\{1, 3\}$; c) $\left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$; d) $\left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$.

9. Dacă $(b_n)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică cu termeni reali, pentru care $b_5 = 48$ și $b_8 = 384$, atunci rația progresiei este:

a) 1; b) 2; c) 3; d) 6.

10. Valoarea expresiei $E = \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}}{1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2n-2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este:

a) $E = \frac{3}{2^n + 1}$; b) $E = \frac{3}{2^{n-1} + 1}$; c) $E = \frac{1}{2^{n+1} + 1}$; d) $E = \frac{2}{2^n + 1}$.

11. Valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - m \cdot x + m - 1$ este tangentă la axa Ox este:

a) $m = 2$; b) $m = -2$; c) $m = 1$; d) $m = 0$.

12. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + m \cdot x + n$. Valorile parametrilor $m, n \in \mathbb{R}$, pentru care graficul funcției f are vârful $V(3, 5)$, sunt:

a) $m = -6$, $n = 14$; b) $m = -3$, $n = 7$; c) $m = 3$, $n = -7$;

d) $m = 6$, $n = -14$.

13. Fie funcțiile de gradul al doilea $f_m(x) = mx^2 - (2m - 1)x + m - 1$, unde $m \in \mathbb{R}^*$. Valoarea lui m , pentru care vârful parabolei asociată funcției f_m se află pe prima bisectoare, este:

a) $m = \frac{1}{4}$; b) $m = 4$; c) $m = \frac{1}{2}$; d) $m = 2$.

14. Valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}^*$, pentru care parabolele asociate funcțiilor de gradul al doilea $f(x) = x^2 - 2x - 4$ și $g(x) = m \cdot x^2 - 2m \cdot x - 6$ au același vârf, este:

a) $m = -1$; b) $m = 1$; c) $m = -2$; d) $m = 2$.

15. Distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2 \cdot x + 8$ cu axa Ox este:

a) 4; **b)** 2; **c)** 8; **d)** 6.

16. Valorile reale ale parametrului m , pentru care $\frac{x^2 + 2 \cdot m \cdot x + 1}{x^2 + 1} > 0$,

$(\forall) x \in \mathbb{R}$, sunt:

a) $m \in (2, +\infty)$; **b)** $m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; **c)** $m \in \{\emptyset\}$;

d) $m \in (-1, 1)$.

17. Inecuația $|1 - 2 \cdot x| \leq |x + 4|$ are soluția S :

a) $S = [-1, 5]$; **b)** $S = \{\emptyset\}$; **c)** $S = [5, +\infty)$; **d)** $S = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

18. Știind că $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sunt rădăcinile ecuației $x^2 + 3 \cdot x + 1 = 0$, atunci expresia $E = \frac{x_1^2 + 1}{x_1 + 1} + \frac{x_2^2 + 1}{x_2 + 1}$ are valoarea:

a) $E = 3$; **b)** $E = -3$; **c)** $E = 0$; **d)** $E = 1$.

19. Produsul P al rădăcinilor întregi pentru inecuația $5^{x^2 - x} \leq 5^{5x - 5}$ are valoarea:

a) $P = 120$; **b)** $P = 0$; **c)** $P = 24$; **d)** $P = 6!$.

20. Produsul rădăcinilor reale ale ecuației $\frac{2x + 1}{x} + \frac{4x}{2x + 1} = 5$ are valoarea:

a) -1 ; **b)** 1 ; **c)** $-\frac{1}{2}$; **d)** $-\frac{1}{4}$.

21. Inecuația $\frac{2 \cdot x - 1}{1 - x} \geq \frac{3 \cdot x + 2}{1 - 2 \cdot x}$ are soluția:

a) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$; **b)** $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; **c)** $[1, +\infty)$; **d)** $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

22. Fie ecuația $x^2 - (2m+1) \cdot x + 3m = 0$. Știind că soluțiile $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ale ecuației date verifică relația $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 11$, valoarea lui m este:

a) $m = 2$; b) $m = 12$; c) $m = -10$; d) $m = -\frac{12}{5}$.

23. Suma soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{3-x} + \sqrt{6+x} = 3$ este:

a) -6 ; b) -9 ; c) -3 ; d) 3 .

24. Fie ecuația $x^2 - x + m = 0$ având soluțiile $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$, pentru care $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = -\frac{3}{4}$, este:

a) $m = -6$; b) $m = 1$; c) $m = -1$; d) $m = 2$.

25. Suma S a soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{4x^2 + 6x + 3} = x + 2$ este:

a) $S = -1$; b) $S = \frac{1}{3}$; c) $S = -\frac{2}{3}$; d) $S = 0$.

26. Suma S a soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 1$ este:

a) $S = 17$; b) $S = 23$; c) $S = 5$; d) $S = 22$.

27. Produsul P al soluțiilor reale ale ecuației $2^x - 14 \cdot 2^{-x} = -5$ este:

a) $P = -7$; b) $P = 1$; c) $P = 0$; d) $P = -1$.

28. Suma S a soluțiilor reale ale ecuației $3^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$ este:

a) $S = 5$; b) $S = 1$; c) $S = 6$; d) $S = -4$.

29. Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 14$ este:

a) $\{-2, 2\}$; b) $\{-1, 1\}$; c) $\{\emptyset\}$; d) $\{-3, 3\}$.

30. Suma S a soluțiilor reale ale ecuației $(\sqrt{2} + 1)^x + (\sqrt{2} - 1)^x = 6$ este:

a) $S = 2$; b) $S = 0$; c) $S = -4$; d) $S = 3$.

31. Produsul P al soluțiilor reale ale ecuației $(x+2)^{\log_2(x+2)} = 4 \cdot (x+2)$ este:

a) $P = 2$; **b)** $P = 0$; **c)** $P = \frac{3}{2}$; **d)** $P = -3$.

32. Mulțimea A a soluțiilor reale ale ecuației $\log_{2x+1}(2x^2 - 8x + 15) = 2$, este:

a) $A = \{-7, 1\}$; **b)** $A = \{1\}$; **c)** $A = \{-7\}$; **d)** $A = \{-7, -1\}$.

33. Mulțimea A a soluțiilor reale ale ecuației

$\log_{\sqrt{x}}(x+2) + \log_x(x^2 + 2x) = 4$ este:

a) $A = \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$; **b)** $A = \left\{\frac{1}{2}\right\}$; **c)** $A = \{2, 4\}$; **d)** $A = \{\emptyset\}$.

34. Valoarea lui $n \in \mathbb{N}$, pentru care $3 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 = 8$, este:

a) $n = 2$; **b)** $n = 16$; **c)** $n = 5$; **d)** $n = 8$.

35. În dezvoltarea $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)^9$, $x > 0$, termenul independent de x are valoarea:

a) 672; **b)** 670; **c)** 772; **d)** 770.

36. $x \in \mathbb{N}^*$ pentru care al treilea termen al dezvoltării $(x + x^{\lg x})^5$ are valoarea 10^6 , este:

a) 20; **b)** 10; **c)** 5; **d)** 15.

37. Valoarea lui $n \in \mathbb{N}$, pentru care suma coeficienților primilor trei termeni din dezvoltarea $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}^*$ să fie egală cu 97, este:

a) $n = 8$; **b)** $n = 6$; **c)** $n = 7$; **d)** $n = 2$.

38. Valoarea lui $n \in \mathbb{N}$, pentru care al treilea coeficient al dezvoltării $\left(x\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, $x > 0$ este egal cu 36, este:

a) $n = 5$; **b)** $n = 9$; **c)** $n = 7$; **d)** $n = 8$.

39. Valoarea lui $n \in \mathbb{N}$, pentru care coeficienții primilor trei termeni ai dezvoltării $\left(\sqrt{y} + \frac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^n$, $y > 0$ formează o progresie aritmetică, este:

a) $n = 3$; **b)** $n = 5$; **c)** $n = 7$; **d)** $n = 8$.

40. În dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{2^x} + \sqrt{2^{1-x}}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, suma coeficienților ultimilor trei termeni este egală cu 22. Atunci, mulțimea valorilor lui x , pentru care suma $T_3 + T_5 = 135$, este:

a) $\{-1, 2\}$; **b)** $\{1\}$; **c)** $\{\emptyset\}$; **d)** $\{-2, 1\}$.

41. În dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{y}\right)^{49}$, termenul T_{k+1} , care îi conține pe x și y la aceeași putere, este:

a) T_{28} ; **b)** T_{23} ; **c)** T_{22} ; **d)** T_{29} .

42. Valoarea lui z^9 , unde $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, este:

a) 1; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** $-\frac{1}{2}$; **d)** $\sqrt{3}$.

43. Valoarea lui z^{24} , unde $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, este:

a) 1; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** $-\frac{1}{2}$; **d)** $\sqrt{3}$.

44. Numărul $z \in \mathbb{C}$ care verifică relația $|z| - z = 1 + 2 \cdot i$ este:

a) $3 + 2 \cdot i$; **b)** $-3 + 2 \cdot i$; **c)** $\frac{1}{2} + 2 \cdot i$; **d)** $\frac{3}{2} - 2 \cdot i$.

45. Suma soluțiilor ecuației $\sin x = 1 + \cos^2 x$, în mulțimea $[0, 2\pi)$, este:

a) π ; b) 0; c) $\frac{\pi}{2}$; d) 2π .

46. Pentru $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, care satisface ecuația $x + \frac{1}{x} = -1$, valoarea expresiei

$E = x^{333} + \frac{1}{x^{333}}$ este:

a) $E = 1$; b) $E = 2$; c) $E = -3$; d) $E = i$.

47. Suma, S , a rădăcinilor ecuației $z^4 + 81 \cdot z^2 = 0$ este:

a) $S = 1$; b) $S = 2$; c) $S = 3$; d) $S = 0$.

48. Valoarea expresiei $E = \sin 170^\circ - \sin 10^\circ$ este:

a) $E = 0$; b) $E = -1$; c) $E = \frac{1}{2}$; d) $E = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

49. Valoarea expresiei $E = \sin^2 80^\circ + \sin^2 10^\circ$ este:

a) $E = 1$; b) $E = 0$; c) $E = \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $E = \frac{1}{2}$.

50. Valoarea expresiei $E = \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 160^\circ + \cos 170^\circ$ este:

a) $E = 0$; b) $E = 1$; c) $E = \frac{1}{2}$; d) $E = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

SOLUȚII
ALGEBRĂ clasa a IX-a și a X-a

1. $a_7 = a_3 + 4 \cdot r \Rightarrow r = 4$, deci $a_{33} = a_1 + 32 \cdot r$. În același timp, din $a_3 = a_1 + 2 \cdot r \Rightarrow a_1 = -3$, deci $a_{33} = -3 + 32 \cdot 4 = 125$.

Răspunsul corect este c).

2. $\frac{C_n^1}{2} = \frac{C_n^0 + \frac{C_n^2}{4}}{2} \Leftrightarrow C_n^1 = C_n^0 + \frac{C_n^2}{4} \Rightarrow n = 1 + \frac{n(n-1)}{8}$, echivalent cu $n^2 - 9n + 8 = 0$. Rezultă rădăcinile ecuației $n = 8$ și $n = 1$, care nu convine.

Răspunsul corect este b).

3. Considerând cele 3 numere ca fiind $a, b, c \in \mathbb{R}$, acestea verifică relațiile

$$\begin{cases} a + b + c = 12 \\ a + c = 2b \\ b + 2 = \sqrt{(a+1)(c+11)} \end{cases} \quad . \text{ Din primele două relații, rezultă imediat că } b = 4.$$

Înlocuind aceasta în ultima relație și ridicând la pătrat, rezultă $(a+1)(c+11) = 36 \Leftrightarrow a \cdot c + 11a + c = 25$. Cum $a + c = 8 \Leftrightarrow c = 8 - a$, obținem ecuația $a^2 - 18a + 17 = 0$, cu soluțiile $a_1 = 17$ și $a_2 = 1$. Pentru $a_1 = 17$ rezultă $c_1 = -9$, iar pentru $a_2 = 1$ rezultă $c_2 = 7$. Numerele căutate sunt astfel $\{17, 4, -9\}$ și $\{1, 4, 7\}$.

Răspunsul corect este b).

4. Din relația $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, dând valori lui n , rezultă

$$\begin{cases} a_2 - a_6 + a_4 = -7 \Leftrightarrow a_1 - r = -7 \\ a_8 - a_7 = 2a_4 \Leftrightarrow 2a_1 + 5r = 0 \end{cases}, \text{ ceea ce implică } \begin{cases} a_1 = -5 \\ r = 2 \end{cases}.$$

Răspunsul corect este d).

5. Fie a_1 primul termen al progresiei aritmetice cu rația r . Atunci

$$a_4 = a_1 + 3r, \quad a_8 = a_1 + 7r, \quad a_{12} = a_1 + 11r, \quad a_{16} = a_1 + 15r.$$

Rezultă că $a_4 + a_{16} = a_8 + a_{12} = 2a_1 + 18r = 112$.

$$S_{19} = \sum_{k=1}^{19} a_k = 19 \cdot a_1 + \frac{18 \cdot 19}{2} \cdot r = 19(a_1 + 9r) = \frac{19}{2}(2a_1 + 18r) = 1064.$$

Răspunsul corect este **d**).

6. Impunând ca numerele $2^x - 1$, 4^x și $2^{x+1} + 3$ să fie în progresie aritmetică, rezultă $\frac{(2^x - 1) + (2^{x+1} + 3)}{2} = 4^x$, deci $3 \cdot 2^x + 2 = 2 \cdot (2^x)^2$. Notând $2^x = y$, rezultă ecuația $2 \cdot y^2 - 3 \cdot y - 2 = 0$, cu soluțiile $y_1 = 2$ și $y_2 = -\frac{1}{2}$, care nu convine. Rezultă $2^x = 2$, deci $x = 1$.

Răspunsul corect este **a**).

7. Expresia $E = 1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^n$ este progresie geometrică având rația 3, deci $E = \frac{3^{n+1} - 1}{2} < 1000 \Rightarrow 3^{n+1} < 2001 \Leftrightarrow 3^n < 667$. Cum pentru $n = 5 \Rightarrow 3^5 = 243$, iar pentru $n = 6 \Rightarrow 3^6 = 729 > 667$, rezultă că $n = 5$.

Răspunsul corect este **b**).

$$8. (x + 7)^2 = (3x + 11) \cdot (5 - x) \Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0, \text{ având rădăcinile } x_1 = -3 \text{ și } x_2 = \frac{1}{2}.$$

Răspunsul corect este **d**).

$$9. b_5 = b_1 \cdot q^4 = 48, \quad b_8 = b_1 \cdot q^7 = 384 \Rightarrow 48 \cdot q^3 = 384 \Rightarrow q = 2.$$

Răspunsul corect este **b**).

$$10. E = \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}}{1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2n-2}} = \frac{\frac{2^n - 1}{2 - 1}}{\frac{2^{2n} - 1}{2^2 - 1}} = \frac{3}{2^n + 1}.$$

Răspunsul corect este **a**).

11. Vârful parabolei este $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, iar condiția ca parabola să fie tangentă la axa Ox este $-\frac{\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = 2$.

Răspunsul corect este a).

$$12. V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = V(3, 5) \Rightarrow m = -6, n = 14.$$

Răspunsul corect este a).

13. Vârfurile parabolilor asociate funcțiilor

$f_m(x) = mx^2 - (2m-1)x + m-1$, sunt $V(x_V, y_V)$, unde $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{2m-1}{2m}$,
iar $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4m}$. Vârfurile se află pe prima bisectoare, ceea ce implică
 $x_V = y_V$. Rezultă $m = \frac{1}{4}$.

Răspunsul corect este a).

14. Parabola asociată funcției $f(x) = x^2 - 2x - 4$ are vârful $V_1(1, -5)$, iar parabola asociată funcției $g(x) = m \cdot x^2 - 2m \cdot x - 6$ are vârful $V_2\left(1, -\frac{m^2 + 6m}{m}\right)$, $m \neq 0$. Impunând ca cele două parabole să aibă același vârf, rezultă $-\frac{m^2 + 6m}{m} = -5$, echivalent cu $m(m+1) = 0$, deci $m = -1$.

Răspunsul corect este a).

15. Ecuația $-x^2 + 2x + 8 = 0$ are rădăcinile $x_1 = -2$ și $x_2 = 4$, deci punctele de intersecție ale graficului funcției f cu axa Ox sunt $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$, distanța dintre acestea fiind $d(A, B) = |x_2 - x_1| = 6$.

Răspunsul corect este d).

$$16. \frac{x^2 + 2 \cdot m \cdot x + 1}{x^2 + 1} > 0, \quad (\forall) x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot m \cdot x + 1 > 0, \quad \text{ceea ce}$$

implică $\Delta = 4m^2 - 4 < 0$, deci $m^2 < 1 \Leftrightarrow m \in (-1, 1)$.

Răspunsul corect este **d**).

$$17. |1 - 2x| = \begin{cases} 1 - 2x, & \text{pentru } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \text{pentru } x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{și} \quad |x + 4| = \begin{cases} x + 4, & \text{pentru } x \geq -4 \\ -x - 4, & \text{pentru } x < -4 \end{cases}.$$

Pentru $x \in (-\infty, -4) \Rightarrow 1 - 2x \leq -x - 4 \Rightarrow x \geq 5$, deci $x \in \{\emptyset\}$.

Pentru $x \in \left[-4, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 1 - 2x \leq x + 4 \Rightarrow x \geq -1$, deci $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

Pentru $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \Rightarrow 2x - 1 \leq x + 4 \Rightarrow x \leq 5$, deci $x \in \left(\frac{1}{2}, 5\right]$.

Reunind soluțiile obținute, rezultă $x \in [-1, 5]$.

Răspunsul corect este **a**).

18. Rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 + 3 \cdot x + 1 = 0$ verifică relațiile lui

Viete, respectiv $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -3$ și $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 1$.

Rezultă

$$E = \frac{x_1^2 + 1}{x_1 + 1} + \frac{x_2^2 + 1}{x_2 + 1} = \frac{x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) + (x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 + 2}{(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 + 1} = -3.$$

Răspunsul corect este **b**).

19. $5^{x^2-x} \leq 5^{5x-5} \Rightarrow x^2 - x \leq 5x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \leq 0 \Rightarrow x \in [1, 5]$. Rezultă

că $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, deci $P = 5! = 120$.

Răspunsul corect este **a**).

$$20. \quad \frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5 \Leftrightarrow 2 \cdot x^2 + x - 1 = 0, \quad x \neq 0, \quad x \neq -\frac{1}{2}. \quad \text{Rezultă}$$

rădăcinile $x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_2 = -1$, deci produsul acestora are valoarea $-\frac{1}{2}$.

Răspunsul corect este c).

$$21. \quad \frac{2 \cdot x - 1}{1 - x} \geq \frac{3 \cdot x + 2}{1 - 2 \cdot x} \Leftrightarrow \frac{-x^2 + x - 2}{(1 - x)(1 - 2x)} \geq 0. \quad \text{Cum ecuația de gradul al}$$

doilea $-x^2 + x - 2 = 0$ nu are rădăcini reale, deci $-x^2 + x - 2 < 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$,

rezultă că $\frac{-x^2 + x - 2}{(1 - x)(1 - 2x)} \geq 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 - 2x) < 0$, deci $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Răspunsul corect este b).

22. Pentru ecuația $x^2 - (2m+1) \cdot x + 3m = 0$, rădăcinile sale verifică relațiile $x_1 + x_2 = 2m+1$ și $x_1 \cdot x_2 = 3m$. Rezultă că $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 11$, echivalent cu $2m+1+3m=11$, deci $m=2$.

Răspunsul corect este a).

$$23. \quad \sqrt{3-x} + \sqrt{6+x} = 3 \text{ implică } 3-x \geq 0 \text{ și } 6+x \geq 0, \text{ deci } x \in [-6, 3]$$

Ecuația este echivalentă cu $\sqrt{3-x} = 3 - \sqrt{6+x}$, care, prin ridicare la pătrat, implică $3-x = 9 + 6+x - 6\sqrt{6+x} \Leftrightarrow 6\sqrt{6+x} = 2x+12 \Leftrightarrow 3\sqrt{6+x} = x+6$.

Ridicând la pătrat, obținem ecuația de gradul al doilea, $x^2 + 3x - 18 = 0$, având rădăcinile $x_1 = -6$ și $x_2 = 3$, suma lor fiind astfel -3 .

Răspunsul corect este c).

24. Rădăcinile ecuației $x^2 - x + m = 0$ verifică relațiile $x_1 + x_2 = 1$ și $x_1 \cdot x_2 = m$. Rezultă că

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{(x_1+x_2)+2}{(x_1+x_2)+x_1 \cdot x_2+1} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{m+2} = -\frac{3}{4}, \quad \text{ceea ce}$$

implică $m = -6$.

Răspunsul corect este a).

25. $\sqrt{4x^2 + 6x + 3} = x + 2$ implică $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$ și $4x^2 + 6x + 3 \geq 0$, ce este verificată pentru $(\forall)x \in \mathbb{R}$. Deci, ecuația are sens pentru $x \in [-2, +\infty)$. Prin ridicare la pătrat, rezultă $3x^2 + 2x - 1 = 0$, care are rădăcinile $x_1 = -1$ și $x_2 = \frac{1}{3}$, ambele fiind în intervalul $[-2, +\infty)$. Rezultă suma rădăcinilor ecuației $S = -\frac{2}{3}$.

Răspunsul corect este c).

26. Pentru ecuația $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$, se impun condițiile $x-1 \geq 0$ și $x+8-6\sqrt{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x+8 \geq 6\sqrt{x-1}$. Ridicând la pătrat ultima inecuație, obținem $x^2 - 20x + 100 \geq 0 \Leftrightarrow (x-10)^2 \geq 0$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$. Deci, ecuația inițială are sens pentru $x \in [1, +\infty)$. În aceste condiții, ridicând la pătrat ecuația dată, rezultă $x+8-6\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x+7 = 6\sqrt{x-1}$, care prin ridicare la pătrat implică ecuația de gradul doi $x^2 - 22x + 85 = 0$. Aceasta are rădăcinile $x_1 = 5$ și $x_2 = 17$, ambele aflându-se în intervalul $[1, +\infty)$. Astfel, suma soluțiilor ecuației date este $S = 22$.

Răspunsul corect este d).

27. Pentru ecuația $2^x - 14 \cdot 2^{-x} = -5$, notând $2^x = y$, obținem ecuația de gradul doi $y^2 + 5y - 14 = 0$, cu rădăcinile $y_1 = -7$ și $y_2 = 2$. Din $2^x = 2$, rezultă soluția $x = 1$, iar $2^x = -7$ nu are soluții reale. Rezultă că produsul rădăcinilor reale ale ecuației date este $P = 1$.

Răspunsul corect este b).

28. $3^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$ implică $x \geq 0$. Ecuația este echivalentă cu $3^{x-2} = 3^{-\sqrt{x}}$, ceea ce implică $x-2 = -\sqrt{x} \Leftrightarrow 2-x = \sqrt{x}$. Aceasta impune condiția $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$. Rezultă, astfel, că $x \in [0, 2]$. Ridicând la pătrat ecuația

$2 - x = \sqrt{x}$, rezultă $x^2 - 5x + 4 = 0$, care are rădăcinile $x_1 = 1 \in [0, 2]$ și $x_2 = 4 \notin [0, 2]$. Rezultă suma soluțiilor ecuației date $S = 1$.

Răspunsul corect este b).

29. Pentru ecuația $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 14$ se observă că

$$(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 1 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}. \text{ Astfel, ecuația dată este echivalentă cu}$$

$$(2 + \sqrt{3})^x + \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^x} = 14. \text{ Notând } (2 + \sqrt{3})^x = y, \text{ rezultă ecuația de gradul doi}$$

$$y^2 - 14y + 1 = 0, \text{ având rădăcinile } y_{1,2} = 7 \pm 4\sqrt{3}.$$

Din $(2 + \sqrt{3})^x = 7 + 4\sqrt{3}$ rezultă $x = 2$, iar din $(2 + \sqrt{3})^x = 7 - 4\sqrt{3}$ rezultă $x = -2$. Astfel, soluțiile ecuației sunt $\{-2, 2\}$.

Răspunsul corect este a).

30. Pentru ecuația $(\sqrt{2} + 1)^x + (\sqrt{2} - 1)^x = 6$ se observă că

$$(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}. \text{ Ecuația dată se va scrie sub forma}$$

$$\text{echivalentă } (\sqrt{2} + 1)^x + \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^x} = 6. \text{ Notând } (\sqrt{2} + 1)^x = y, \text{ rezultă}$$

$$y^2 - 6y + 1 = 0, \text{ având rădăcinile } y_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}. \text{ Din } (\sqrt{2} + 1)^x = 3 + 2\sqrt{2} \text{ rezultă}$$

$x = 2$, iar din $(\sqrt{2} + 1)^x = 3 - 2\sqrt{2}$ rezultă $x = -2$. Astfel, soluțiile ecuației sunt $\{-2, 2\}$, iar suma acestora este $S = 0$.

Răspunsul corect este b).

31. Pentru ecuația $(x + 2)^{\log_2(x+2)} = 4 \cdot (x + 2)$ se impune condiția $x + 2 > 0$, deci $x \in (-2, +\infty)$.

Logaritmăm în baza 2 și obținem ecuația $[\log_2(x+2)]^2 = \log_2 4 + \log_2(x+2)$. Notând $\log_2(x+2) = y$, rezultă $y^2 - y - 2 = 0$, cu rădăcinile $y_1 = 2$ și $y_2 = -1$.

Pentru $\log_2(x+2) = 2$ rezultă $x = 2$, iar pentru $\log_2(x+2) = -1$ rezultă $x = -\frac{3}{2}$. Cele două soluții aparțin intervalului $(-2, +\infty)$. Astfel, produsul rădăcinilor ecuației este $P = -3$.

Răspunsul corect este d).

32. Pentru ecuația $\log_{2x+1}(2x^2 - 8x + 15) = 2$ impunem condițiile $2x+1 > 0$ și $2x^2 - 8x + 15 > 0$. Din prima condiție rezultă $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, iar a doua condiție este verificată $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

Cu acestea, ecuația dată este echivalentă cu $2x^2 - 8x + 15 = (2x+1)^2$, respectiv $x^2 + 6x - 7 = 0$, având rădăcinile $x_1 = 1 \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ și $x_2 = -7 \notin \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Răspunsul corect este b).

33. Ecuația $\log_{\sqrt{x}}(x+2) + \log_x(x^2 + 2x) = 4$ implică condiția $x > 0$.

Ecuația este echivalentă cu

$$\frac{\log_x(x+2)}{\log_x \sqrt{x}} + \log_x(x^2 + 2x) = 4 \Leftrightarrow 2\log_x(x+2) + \log_x(x^2 + 2x) = 4,$$

$$\log_x x(x+2)^3 = 4 \Rightarrow x(x+2)^3 = x^4.$$

Cum $x > 0$, ecuația devine

$(x+2)^3 = x^3 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 4 = 0$, care nu are rădăcini reale, deci $A = \{\emptyset\}$.

Răspunsul corect este d).

$$34. \quad 3 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 = 8 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{n!}{(n-1)!} + 2 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} = 8 \Leftrightarrow 3n + n(n-1) = 8,$$

echivalentă cu $n^2 + 2n - 8 = 0$, ce are rădăcinile $n_1 = -4 \notin \mathbb{N}$ și $n_2 = 2$.

Răspunsul corect este a).

35. $T_{k+1} = C_9^k \cdot (\sqrt{x})^{9-k} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k = C_9^k \cdot 2^k \cdot x^{\frac{9-k}{2}-k}$. Pentru ca termenul să fie independent de x , trebuie ca $\frac{9-k}{2} - k = 0 \Leftrightarrow k = 3$. Obținem astfel, $T_4 = C_9^3 \cdot 2^3 = 672$.

Răspunsul corect este a).

36. $T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$. Înlocuind, obținem $T_{k+1} = C_5^k \cdot x^{5-k} \cdot (x^{\lg x})^k$, deci al treilea termen va fi $T_3 = C_5^2 \cdot x^3 \cdot (x^{\lg x})^2 = 10^6 \Leftrightarrow \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot x^{3+2\lg x} = 10^6 \Rightarrow x^{3+2\lg x} = 10^5$. Logaritmând în baza 10, obținem $(3+2\lg x) \cdot \lg x = 5$, echivalent cu $2 \cdot (\lg x)^2 + 3 \cdot \lg x - 5 = 0$. Notând $\lg x = y$, rezultă ecuația de gradul doi $2 \cdot y^2 + 3 \cdot y - 5 = 0$, având rădăcinile reale $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{5}{2}$.

Din $\lg x = 1$, rezultă $x_1 = 10$, iar din $\lg x = -\frac{5}{2}$, rezultă $x_2 = 10^{-5/2} \notin \mathbb{N}$.

Răspunsul corect este b).

37. Primii trei termeni ai dezvoltării $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ sunt

$$C_n^0 (x^2)^n + C_n^1 (x^2)^{n-1} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right) + C_n^2 (x^2)^{n-2} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^2,$$

deci suma coeficienților primilor trei termeni este $C_n^0 + C_n^1 \cdot (-2) + C_n^2 \cdot (-2)^2 = 97$.

Rezultă $n^2 - 2n - 48 = 0$, având rădăcinile $n_1 = -6 \notin \mathbb{N}$ și $n_2 = 8$.

Răspunsul corect este a).

38. Al treilea coeficient al dezvoltării $\left(x\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ este $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Impunând condiția $\frac{n(n-1)}{2} = 36 \Rightarrow n^2 - n - 72 = 0$, ecuație având rădăcinile $n_1 = -8 \notin \mathbb{N}$ și $n_2 = 9$.

Răspunsul corect este **b**).

39. Coeficienții primilor trei termeni ai dezvoltării $\left(\sqrt{y} + \frac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^n$ sunt

$a = C_n^0 = 1$, $b = C_n^1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ și $c = C_n^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{n(n-1)}{8}$. Impunând ca aceștia să fie în progresie aritmetică, rezultă $b = \frac{a+c}{2} \Leftrightarrow n^2 - 9n + 8 = 0$, având rădăcinile $n_1 = 8$ și $n_2 = 1$ care nu convine.

Răspunsul corect este **d**).

40. În dezvoltarea $\left(\sqrt{2^x} + \sqrt{2^{1-x}}\right)^n$, suma coeficienților ultimilor trei termeni este $C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 22 \Rightarrow n^2 + n - 42 = 0$, având rădăcinile $n_1 = -7 \notin \mathbb{N}$ și $n_2 = 6$. Pentru dezvoltarea $\left(\sqrt{2^x} + \sqrt{2^{1-x}}\right)^6$, din expresia $T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$, rezultă $T_3 = C_6^2 \cdot \left(\sqrt{2^x}\right)^4 \cdot \left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^2$ și $T_5 = C_6^4 \cdot \left(\sqrt{2^x}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^4$.

$T_3 + T_5 = 135$ implică $C_6^2 \cdot \left(\sqrt{2^x}\right)^4 \cdot \left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^2 + C_6^4 \cdot \left(\sqrt{2^x}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^4 = 135$, echivalent cu $15 \cdot \left(2^x\right)^2 \cdot 2^{1-x} + 15 \cdot 2^x \cdot \left(2^{1-x}\right)^2 = 135$, care prin simplificare devine $\left(2^x\right)^2 \cdot 2^{1-x} + 2^x \cdot \left(2^{1-x}\right)^2 = 9$, sau $2^{x+1} + 2^{2-x} = 9 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x + \frac{4}{2^x} = 9$. Notând $2^x = y$, obținem ecuația de gradul doi $2 \cdot y^2 - 9 \cdot y + 4 = 0$, având rădăcinile $y_1 = 4$ și $y_2 = \frac{1}{2}$. Rezultă $x_1 = 2$ și $x_2 = -1$.

Răspunsul corect este **a**).

41. Pentru dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{y}\right)^{49}$, expresia termenului general $T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ implică $T_{k+1} = C_{49}^k \cdot \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{49-k} \cdot (\sqrt{y})^k$. Pentru ca x și y să aibă aceeași putere trebuie ca $\frac{2}{3}(49-k) = \frac{k}{2}$, ceea ce implică $k = 28$, deci T_{29} verifică cerința problemei.

Răspunsul corect este d).

$$42. z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z^3 = z \cdot z^2 = 1 \Rightarrow z^9 = 1.$$

Răspunsul corect este a).

$$43. z = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \Rightarrow z^2 = -i \Rightarrow z^4 = 1 \Rightarrow z^{24} = 1.$$

Răspunsul corect este a).

44. Fie $z = a + i \cdot b$. Relația $|z| - z = 1 + 2 \cdot i$ se va scrie

$\sqrt{a^2 + b^2} - a - i \cdot b = 1 + 2 \cdot i$, de unde, identificând partea reală și cea imaginară, rezultă $b = -2$, $a = \frac{3}{2}$, deci $z = \frac{3}{2} - 2 \cdot i$.

Răspunsul corect este d).

45. $\sin x = 1 + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x - 2 = 0$. Notând $\sin x = t$, ecuația de gradul doi $t^2 + t - 2 = 0$ are rădăcinile $t_1 = 1$ și $t_2 = -2$. Cum $\sin x \in [-1, 1]$, rădăcina $t_2 = -2$ nu convine. Pentru $t_1 = 1$, rezultă $\sin x = 1$, deci singura soluție în $[0, 2\pi)$ este $x = \frac{\pi}{2}$. Astfel, suma soluțiilor ecuației date va fi $\frac{\pi}{2}$.

Răspunsul corect este c).

46. Ecuația $x + \frac{1}{x} = -1$ implică $x^2 + x + 1 = 0$, deci $x^3 = 1$. Astfel, expresia

$$E = x^{333} + \frac{1}{x^{333}} = (x^3)^{111} + \frac{1}{(x^3)^{111}} = 2.$$

Răspunsul corect este **b**).

$$47. z^4 + 81 \cdot z^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 \cdot (z^2 + 81) = 0 \Rightarrow z_1 = 0, z_{2,3} = \pm 9i \Rightarrow S = 0.$$

Răspunsul corect este **d**).

$$48. E = \sin 170^\circ - \sin 10^\circ = \sin(180^\circ - 10^\circ) - \sin 10^\circ = 0.$$

Răspunsul corect este **a**).

$$49. \sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \sin 90^\circ \cdot \cos 10^\circ - \cos 90^\circ \cdot \sin 10^\circ = \cos 10^\circ.$$

$$E = \sin^2 80^\circ + \sin^2 10^\circ = \cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ = 1.$$

Răspunsul corect este **a**).

$$50. \cos 170^\circ = \cos(180^\circ - 10^\circ) = \cos 180^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 180^\circ \cdot \sin 10^\circ = -\cos 10^\circ.$$

$$\cos 160^\circ = \cos(180^\circ - 20^\circ) = \cos 180^\circ \cdot \cos 20^\circ + \sin 180^\circ \cdot \sin 20^\circ = -\cos 20^\circ.$$

Rezultă

$$E = \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 160^\circ + \cos 170^\circ = \cos 10^\circ + \cos 20^\circ - \cos 10^\circ - \cos 20^\circ = 0.$$

Răspunsul corect este **a**).

ENUNȚURI
ALGEBRĂ clasa a XI-a

1. Fie $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ și $\mathbf{I}_2 \in M_2(\mathbb{R})$ matricea unitate și

$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^2 + 3\mathbf{X} + \mathbf{I}_2$. Atunci $f(\mathbf{A})$ este:

a) $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Fie matricele $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ și

$\mathbf{I}_2 \in M_2(\mathbb{R})$ matricea unitate și $f(\mathbf{X}) = 2\mathbf{X}^2 - \mathbf{X} + \mathbf{I}_2$. Atunci $f(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ este:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Fie matricea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Suma S a elementelor

matricii $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ (unde $\mathbf{A}^T$ este transpusa matricii $\mathbf{A}$) este:

a) $S = 0$; b) $S = 2$; c) $S = -2$; d) $S = 4$.

4. Fie matricea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Suma S a elementelor

matricii $\mathbf{A}^3 - 3\mathbf{A}^2 + 4\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3$, unde $\mathbf{I}_3 \in M_3(\mathbb{R})$ matricea unitate, este:

a) $S = 20$; b) $S = 18$; c) $S = 16$; d) $S = 22$.

5. Fie $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in M_3(\mathbb{R})$ soluția sistemului:
$$\begin{cases} \mathbf{X} + 2\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 2\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Atunci matricea $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$ este

a) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Fie $\mathbf{X} \in M_3(\mathbb{R})$ matricea ce verifică ecuația:

$$2\mathbf{X} - 3\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ -8 & -2 & -5 \\ -5 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \text{ unde prin } \mathbf{X}^T \text{ am notat transpusa matricii } \mathbf{X}.$$

Atunci, determinantul $\det \mathbf{X}$ este:

a) 0; b) -5; c) 10; d) -10.

7. Fie $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Atunci $\mathbf{A}^{2017}$ este:

a) $\begin{pmatrix} 2018 & 2017 \\ -2017 & -2016 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -2018 & 2017 \\ 2017 & 2016 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2017 & 2018 \\ -2018 & 2016 \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} 2016 & 2018 \\ -2018 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Fie matricea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Atunci $\mathbf{A}^{2017}$ este:

a) $\begin{pmatrix} a^{2017} & 0 \\ 0 & a^{2017} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & a^{2017} \\ -a^{2017} & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -a^{2017} & 0 \\ 0 & -a^{2017} \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} 0 & -a^{2017} \\ a^{2017} & 0 \end{pmatrix}$.

9. Fie $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $a \neq 1$. Atunci matricea

$B = A + A^2 + \dots + A^{2024}$ este:

$$\begin{aligned} \text{a) } B &= \begin{pmatrix} a^{2024} - 1 & 0 \\ ba^{2024} & 0 \end{pmatrix}; \text{ b) } B = \begin{pmatrix} \frac{a^{2024} - a}{a - 1} & 0 \\ b \frac{a^{2024} - 1}{a - 1} & 0 \end{pmatrix}; \text{ c) } B = \begin{pmatrix} \frac{a^{2025} - a}{a - 1} & 0 \\ b \frac{a^{2024} - 1}{a - 1} & 0 \end{pmatrix} \\ \text{d) } B &= \begin{pmatrix} \frac{a^{2024} - 1}{a - 1} & 0 \\ b \frac{a^{2023} - 1}{a - 1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

10. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Atunci, pentru orice

$a \in \mathbb{R}$, A^{2024} este:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{pmatrix} 1 & 2024 & 2024a + 1012 \cdot 2023 \\ 0 & 1 & 2024 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ b) } & \begin{pmatrix} 1 & 2024 & 2024a + 2024 \cdot 2023 \\ 0 & 1 & 2024 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \text{c) } & \begin{pmatrix} 1 & 2024 & 2024a + 2024 \cdot 2025 \\ 0 & 1 & 2024 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ d) } & \begin{pmatrix} 1 & 2024 & 2024a + 1012 \cdot 2023 \\ 0 & 1 & 2024 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

11. Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, matricea care verifică ecuația

$X^2 - 6X + 5I_2 = 0_2$, unde $I_2 \in M_2(\mathbb{R})$ este matricea unitate, iar 0_2 este matricea nulă. Atunci valorile x, y sunt:

- a) $x = 1, y = 0$ sau $x = 5, y = 0$;
- b) $x = 2, y = 3$ sau $x = 2, y = -3$;
- c) $x = 1, y = 1$ sau $x = 4, y = 1$;
- d) $x = 1, y = 1$ sau $x = -4, y = 1$.

12. Fie matricea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Atunci $\mathbf{A}^n$, $n \geq 1$, este:

a) $a^{n-1}\mathbf{A}$ pentru n impar și $a^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pentru n par;

b) $a^n\mathbf{A}$ pentru n impar și $a^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pentru n par;

c) $a^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pentru n impar și $a^n\mathbf{A}$ pentru n par;

d) $a^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pentru n impar și $a^{n-1}\mathbf{A}$ pentru n par.

13. Fie ecuația matriceală $\mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} \in M_2(\mathbb{R})$. Suma pătratelor elementelor oricărei soluții $\mathbf{X} \in M_2(\mathbb{R})$, a acestei ecuații este:

a) 1; b) 2; c) 4; d) 8.

14. Fie mulțimea de matrice:

$$\mathbf{M} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mid \mathbf{X} \in M_{1,3}(\mathbb{R}), \mathbf{Y} \in M_{3,1}(\mathbb{R}), \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Valoarea $m = \min_{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \mathbf{M}} \{ \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \}$ este:

a) $m = 2\sqrt{3}$; b) $m = 12\sqrt{3}$; c) $m = 12\sqrt{2}$; d) $m = 6\sqrt{2}$.

15. Fie matricele $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ și $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$.

Atunci valoarea expresiei, $S = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$ este:

a) $S = 0$; b) $S = 4$; c) $S = -4$; d) $S = 2$.

16. Suma coeficienților termenilor x^3 și x ai ecuației $\begin{vmatrix} -x-1 & 1 & x \\ 1 & 2 & x^2 \\ 2x & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ este:

a) 0; b) -2; c) 2; d) 4.

17. Fie determinantul $D(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ -2 & x & 1-x \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}, x \in \mathbb{R}$. Atunci valoarea

expresiei $S = D(-1) + D(1)$ este:

a) $S = 0$; b) $S = 2$; c) $S = -2$; d) $S = 1$.

18. Fie expresia $D = \begin{vmatrix} \sin u & \cos u & \cos u \\ \cos u & \sin u & \sin u \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, u \in \mathbb{R}$. Atunci, suma S a

coeficienților termenilor $\cos^2 u$ și $\cos u$ din expresia D este:

a) 6; b) 4; c) -2; d) 2.

19. Fie determinantul $D(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & -2x \\ -1 & x & -1 \\ x & 0 & -x+1 \end{vmatrix}, x \in \mathbb{R}$. Atunci suma S a

soluțiilor ecuației $D(x) = 1$, este:

a) $S = 0$; b) $S = 2$; c) $S = -2$; d) $S = 1$.

20. Fie determinantul $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ -x & 1 & x \\ 0 & -x & 1 \end{vmatrix}, x \in \mathbb{C}$ și mulțimea,

$M = \{x \in \mathbb{C} \mid D(x) = 4\}$. Atunci, $S = \sum_{x \in M} |x|^2$ are valoarea:

a) $S = 4$; b) $S = 8$; c) $S = 10$; d) $S = 2$.

21. Fie funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = x - 4$.

Atunci, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, valoarea determinantului $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ h(a) & h(b) & h(c) \end{vmatrix}$ este:

a) abc ; **b)** 0 ; **c)** $a + b + c$; **d)** $3abc$.

22. Fie ecuația $\begin{vmatrix} x-a & b & c \\ c & x-a & b \\ b & c & x-a \end{vmatrix} = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu soluțiile

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Atunci, suma $S = x_1 + x_2 + x_3$ este:

a) $S = 2a$; **b)** $S = 0$; **c)** $S = a$; **d)** $S = 3a$.

23. Fie matricea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Atunci suma

$S = |x_1| + |x_2| + |x_3|$ a modulelor soluțiilor ecuației $\det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{I}_3) = 0$, unde $\mathbf{I}_3$ este matricea identitate de ordin 3, este:

a) $S = 3$; **b)** $S = 5$; **c)** $S = 8$; **d)** $S = 7$.

24. Știind că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 + x^2 + ax + b = 0$,

$a, b \in \mathbb{R}$ și având $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = 0$, atunci $a + b$ este:

a) $\frac{10}{27}$; **b)** $-\frac{10}{27}$; **c)** $-\frac{8}{27}$; **d)** $\frac{8}{27}$.

25. Fie $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4} \in M_4(\mathbb{R})$ matricea pentru care pentru orice $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $a_{ij} = c_{ij} + r_{ij}$ unde c_{ij}, r_{ij} sunt câtul și respectiv restul împărțirii lui i^2 la j . Atunci, determinantul $\det \mathbf{A}$ este:

a) 1 ; **b)** 2 ; **c)** -2 ; **d)** 0 .

26. Fie $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4} \in M_4(\mathbb{R})$ matricea pentru care pentru orice $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $a_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{j}, & j \text{ divide } i \\ j - i, & j \text{ nu divide } i \end{cases}$. Atunci, determinantul $\det \mathbf{A}$ este:

a) 1; b) -3; c) -2; d) 3.

27. Fie matricea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Mulțimea M a valorilor

parametrului real a pentru care $\text{rang} \mathbf{A} = 2$, este:

a) $M = \{-1\}$; b) $M = \emptyset$; c) $M = \{1\}$; d) $M = \mathbb{R}$.

28. Fie matricea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & b \\ 1 & -1 & a & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$. Suma $S = |a| + |b|$ a

modulelor valorilor parametrilor reali a, b pentru care $\text{rang} \mathbf{A} = 2$, este:

a) $S = 2$; b) $S = 1$; c) $S = 3$; d) $S = 4$.

29. Fie matricele $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ și

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$. Mulțimea M a valorilor parametrului real a pentru

care $\text{rang}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \text{rang}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = 2$, este:

a) $M = \mathbb{R}$; b) $M = \emptyset$; c) $M = \{1\}$; d) $M = \{-1\}$.

30. Fie matricele $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2+a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ și

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & b \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$. Valorile parametrilor reali a și b pentru

care $\text{rang}(\mathbf{A}) + \text{rang}(\mathbf{B}) = 4$ sunt:

a) $a=1, b=1$; **b)** $a=0, b=-3$; **c)** $a=-1, b=-1$; **d)** $a=0, b=-1$.

31. Fie matricea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & b \\ 1 & a+1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a+1 & b^2 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}), a \neq 0$ și

mulțimea $M = \{(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mid \text{rang} \mathbf{A} = 2\}$. Atunci valoarea expresiei

$S = \sum_{(a,b) \in M} (a+b)$, este:

a) $S = -3$; **b)** $S = -4$; **c)** $S = -7$; **d)** $S = -6$.

32. Fie matricele $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Atunci,

matricea $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1}$ este:

a) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -12 & 7 \\ 19 & -11 \end{pmatrix}$; **b)** $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 & -7 \\ 19 & -11 \end{pmatrix}$; **c)** $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 19 & 11 \end{pmatrix}$;

d) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 19 & 7 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$; **e).**

33. Fie matricele $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Atunci suma

S a modulelor elementelor matricii $\mathbf{X}$, soluția ecuației matriceale $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$, este:

a) $S = 132$; **b)** $S = 78$; **c)** $S = 6$; **d)** $S = 87$.

34. Fie matricele $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci, suma S a

elementelor matricii $\mathbf{X}$, soluția ecuației matriceale $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, este:

a) $S = -4$; **b)** $S = 4$; **c)** $S = 0$; **d)** $S = 1$.

35. Fie ε o rădăcină cubică complexă a unității ($\varepsilon^3 = 1, \varepsilon \notin \mathbb{R}$) și ecuația

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluția $\mathbf{X}$ a ecuației este:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon^2 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$.

36. Fie ecuația matriceală $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci, ultima

linie a soluției $\mathbf{X}$ a ecuației este:

a) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8}i & 1 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8}i & 1 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{8}i & 1 \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{8} - \frac{1}{8}i & -\frac{3}{8} + \frac{1}{8}i & 1 \end{pmatrix}$.

37. Fie $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, $\mathbf{0}_3 \in M_3(\mathbb{R})$ matricea nulă și

$\mathbf{I}_3 \in M_3(\mathbb{R})$ matricea unitate. Atunci matricea $(\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})^{-1}$ este:

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & a & b+ac \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 1 & a & b+ac \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **d)** $\begin{pmatrix} 1 & a & b+a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

38. Fie sistemul
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ -x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$
 cu soluția x_0, y_0, z_0 . Atunci valoarea

expresiei $S = x_0^{y_0} + y_0^{z_0} + z_0^{x_0}$, este:

a) $S = 0$; **b)** $S = -1$; **c)** $S = 1$; **d)** $S = -3$.

39. Fie sistemul
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - 3z = 3 \end{cases}$$
 cu soluția x_0, y_0, z_0 . Atunci valoarea

expresiei $S = \max\{|x_0|, |y_0|, |z_0|\}$, este:

a) $S = \frac{1}{11}$; **b)** $S = \frac{10}{11}$; **c)** $S = \frac{5}{11}$; **d)** $S = \frac{12}{11}$.

40. Fie sistemul
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 5y - 3z = -1, m \in \mathbb{R} \\ -x - 3y + 3z = m \end{cases}$$
 cu soluția x_0, y_0, z_0 . Atunci,

suma S a valorilor parametrului real m pentru care $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 81$ este:

a) $S = -\frac{32}{3}$; **b)** $S = 3$; **c)** $S = \frac{32}{3}$; **d)** $S = \frac{29}{3}$.

41. Fie sistemul
$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -x + 2y - 3z = -1, m \in \mathbb{R} \\ 2x - 3y + 6z = m \end{cases}$$
 cu soluția x_0, y_0, z_0 . Valoarea

parametrului real m pentru care expresia $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ este minimă, este:

a) $m = \frac{5}{3}$; **b)** $m = -\frac{7}{3}$; **c)** $m = -\frac{5}{3}$; **d)** $m = \frac{7}{3}$.

42. Fie sistemul

$$\begin{cases} (3a-1)x + 2ay + (3a+1)z = 1 \\ 2ax + 2ay + (3a+1)z = a \\ (a+1)x + (a+1)y + 2(a+1)z = a^2 \end{cases},$$

unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Atunci, dacă x_0, y_0, z_0 este soluție a sistemului, expresia

$S = x_0 + y_0 + z_0$ este:

a) $S = a$; **b)** $S = a^2$; **c)** $S = a + 1$; **d)** $S = -a$.

43. Fie sistemul
$$\begin{cases} x + (m-3)y = 0 \\ (m-3)x + y = 0 \end{cases}, m \in \mathbb{R}. \text{ Sistemul are soluția nebanală}$$

pentru:

a) $m \in \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$; **b)** $m \in \{2, 4\}$; **c)** $m = 3$; **d)** $m \in \{-2, -4\}$.

44. Fie sistemul
$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ (m+1)x - y + 2z = 0, m \in \mathbb{R} \\ x + 2y - mz = 0 \end{cases}$$

Cea mai mare valoare a parametrului real m pentru care sistemul are soluție nebanală este:

a) $m = \frac{1}{3}$; **b)** $m = 2$; **c)** $m = -\frac{1}{3}$; **d)** $m = 0$.

45. Fie sistemul

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + ay - z = 1 \\ -x - 2y + 3z = b, \quad a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

și mulțimea, $M = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{sistemul este compatibil nedeterminat}\}$. Atunci,

$S = \sum_{(a,b) \in M} (|a| + |b|)$ are valoarea:

a) $S = \frac{23}{7}$; **b)** $S = \frac{19}{21}$; **c)** $S = \frac{17}{21}$; **d)** $S = \frac{23}{21}$.

46. Fie sistemul
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$
. Dacă $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \mathbb{R}$ este soluția

sistemului care verifică ecuația $\tilde{y}^2 + 2\tilde{z} + \tilde{x} + 1 = 0$, atunci $S = |\tilde{x}| + |\tilde{y}| + |\tilde{z}|$ are valoarea:

a) $S = 3$; **b)** $S = 4$; **c)** $S = 6$; **d)** $S = 8$.

47. Fie sistemul

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + az = 5 \\ 3x - 4y + 5z = b, \quad a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- a) Pentru $a \neq 4$, $b \neq 6$, sistemul este incompatibil;
- b) Pentru $a = 4$, $b \neq 6$, sistemul este incompatibil;
- c) Pentru $a = 4$, $b = 6$, sistemul este compatibil determinat
- d) Pentru $a \neq 4$, $b = 6$, sistem compatibil nedeterminat.

48. Fie sistemul

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + a^2y + z = a \\ x + y + bz = b, \quad a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- a) Pentru $\forall a \neq 1$ și $\forall b \in \mathbb{R}$ sistemul este incompatibil;
- b) Pentru $a = 1$ și $\forall b \in \mathbb{R}$, sistemul este compatibil determinat;
- c) Pentru $\forall a \neq 1$ și $b = \frac{a+2}{a^2+a+1}$, sistemul este incompatibil
- d) Pentru $\forall a \neq 1$ și $b = \frac{a+2}{a^2+a+1}$, sistemul este compatibil nedeterminat.

49. În mulțimea S_4 a permutărilor mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ considerăm ecuația $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Dacă permutarea $x \in S_4$ este soluția ecuației atunci x^2 este:

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;
- d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

50. Soluția ecuației $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{2024} \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{1012}$ din

mulțimea S_4 a permutărilor mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ este:

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

SOLUȚII
ALGEBRĂ clasa a XI-a

1. Calculăm $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, apoi $\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} + \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Răspunsul corect este **b**).

2. Calculăm

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{C}; \quad \mathbf{C}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ iar } 2\mathbf{C}^2 - \mathbf{C} + \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Răspunsul corect este **d**).

3. Calculăm $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, de unde $S = 0$

Răspunsul corect este **a**).

4. Calculăm $\mathbf{A}^3 - 3\mathbf{A}^2 + 4\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 8 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, de unde $S = 18$

Răspunsul corect este **b**).

5. Din sistemul
$$\begin{cases} \mathbf{X} + 2\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 2\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$
 prin înmulțirea cele de a doua

ecuație cu -2 și apoi prin adunarea ecuațiilor se obține $-3\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix}$, de

unde $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Apoi, din

$$2\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Atunci, } \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Răspunsul corect este **a**).

$$6. \text{ Din ecuația } 2\mathbf{X} - 3\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ -8 & -2 & -5 \\ -5 & 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ prin aplicarea transpusei}$$

obținem:

$$(2\mathbf{X} - 3\mathbf{X}^T)^T = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ -8 & -2 & -5 \\ -5 & 5 & -2 \end{pmatrix}^T \text{ sau echivalent } 2\mathbf{X}^T - 3\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -5 \\ 7 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \text{ și}$$

$$\text{obținem sistemul } \begin{cases} 2\mathbf{X} - 3\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ -8 & -2 & -5 \\ -5 & 5 & -2 \end{pmatrix} \\ -3\mathbf{X} + 2\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -5 \\ 7 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}. \text{ Dacă înmulțim prima ecuație cu}$$

2, a doua cu 3 și apoi le adunăm obținem

$$-5\mathbf{X} = 2 \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ -8 & -2 & -5 \\ -5 & 5 & -2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 & -8 & -5 \\ 7 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -15 \\ 5 & -10 & 5 \\ -10 & -5 & -10 \end{pmatrix} \text{ deci}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Tot din sistem rezultă } \mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Atunci}$$

$$\det \mathbf{X} = 4 - 4 - 3 - 12 + 4 + 1 = -10.$$

Observație: Alternativ, pentru găsirea matricii $\mathbf{X}$ se putea lua

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \text{ care prin înlocuirea în ecuația } 2\mathbf{X} - 3\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ -8 & -2 & -5 \\ -5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

conducea la un sistem de unde rezulta matricea.

Răspunsul corect este d).

7. Observând că $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, demonstrăm prin inducție matematică:

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & -(n-1) \end{pmatrix}$$

$$\text{Deci, } \mathbf{A}^{2017} = \begin{pmatrix} 2018 & 2017 \\ -2017 & -2016 \end{pmatrix}$$

Răspunsul corect este a).

8. Calculând

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}; \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & a^3 \\ -a^3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}; \mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} 0 & -a^5 \\ a^5 & 0 \end{pmatrix},$$

demonstrăm prin inducție matematică:

pentru $k \geq 1$, dacă $n = 4k$, $\mathbf{A}^n = a^n \mathbf{I}_2$;

dacă $n = 4k + 1$, $\mathbf{A}^n = a^{n-1} \mathbf{A}$;

dacă $n = 4k + 2$, $\mathbf{A}^n = -a^n \mathbf{I}_2$;

dacă $n = 4k + 3$, $\mathbf{A}^n = -a^{n-1} \mathbf{I}_2$.

$$\text{Atunci, } \mathbf{A}^{2017} = \begin{pmatrix} 0 & -a^{2017} \\ a^{2017} & 0 \end{pmatrix}.$$

Răspunsul corect este d).

9. Calculăm

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ a^3b & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ a^3b & 0 \end{pmatrix}.$$

Se demonstrează prin inducție matematică că $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ a^n b & 0 \end{pmatrix}$. Atunci

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{2024} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a^{2024} & 0 \\ a^{2023}b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a + a^2 + \dots + a^{2024} & 0 \\ b + ab + \dots + a^{2023}b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \frac{a^{2024} - 1}{a - 1} & 0 \\ b \frac{a^{2024} - 1}{a - 1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^{2025} - a}{a - 1} & 0 \\ b \frac{a^{2024} - 1}{a - 1} & 0 \end{pmatrix}$$

Rezultă,

Răspunsul corect este **c**).

10. Calculăm succesiv,

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2a+1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3a+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4a+6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prin inducție matematică demonstrăm formula:

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & na + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Rezultă } \mathbf{A}^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & 2024 & 2024a + 1012 \cdot 2023 \\ 0 & 1 & 2024 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Răspunsul corect este **d**).

$$11. \quad \mathbf{X}^2 - 6\mathbf{X} + 5\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 6x + 5 & -6y \\ -6y & x^2 + y^2 - 6x + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de unde $x=1, y=0$ sau $x=5, y=0$.

Răspunsul corect este **a**).

$$12. \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & a^2 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & a^3 & a^3 \\ a^3 & 0 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 0 & a^4 \\ 0 & a^4 & a^4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demonstrăm prin inducție matematică că:

$$\mathbf{A}^n = a^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ pentru } n \text{ par și } \mathbf{A}^n = a^{n-1} \mathbf{A} \text{ pentru } n \text{ impar.}$$

Răspunsul corect este **a**).

13. Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Atunci

$$X^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & y(x+t) \\ z(x+t) & t^2 + yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ implică sistemul:}$$

$$\begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ y(x+t) = 1 \\ z(x+t) = -1 \\ t^2 + yz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = t^2 \\ y = -z \\ z(x+t) = -1, x+t \neq 0 \\ t^2 + yz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -z \\ 2xy = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -z \\ 2xy = 1 \\ x = \pm y \end{cases}.$$

Dacă $x = y$ atunci $2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ și sistemul are soluțiile

$$x = y = t = \frac{1}{\sqrt{2}}, z = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x = y = t = -\frac{1}{\sqrt{2}}, z = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ și ecuația matriceală are}$$

$$\text{soluțiile } X = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Dacă $x = -y$ atunci $2x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ și sistemul are soluții complexe neacceptate.

Rezultă că suma pătratelor elementelor oricăreia dintre soluții este 2.

Răspunsul corect este **b**).

$$14. \text{ Din } \mathbf{X} \in M_{1,3}(\mathbb{R}), \mathbf{Y} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ rezultă } \mathbf{X} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3), \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Atunci din ecuația } \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ rezultă}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Atunci, $x_i \neq 0, y_i \neq 0, \forall i = 1, 2, 3$ și $y_1 = y_2 = 2y_3, x_1 = x_2 = -x_3, x_1y_1 = -1$. Fie $x_1 = x, x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ și rezultă soluțiile:

$$y_1 = y_2 = 2y_3, x_2 = x, x_3 = -x, y_1 = y_2 = -\frac{1}{x}, y_3 = -\frac{1}{2x}.$$

$$\text{Avem } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x & x & -x \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x} \\ -\frac{2}{x} \end{pmatrix}, \text{ de unde mai departe calculăm}$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x & x & -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & -\frac{1}{x} & -\frac{2}{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x} \\ -\frac{2}{x} \end{pmatrix} = 3x^2 + 6\frac{1}{x^2}.$$

Din inegalitatea mediilor, $3x^2 + 6\frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{3x^2 \cdot 6\frac{1}{x^2}} \Rightarrow 3x^2 + 6\frac{1}{x^2} \geq 6\sqrt{2}$, prin urmare minimul expresiei $3x^2 + 6\frac{1}{x^2}$ este $m = 6\sqrt{2}$.

Observație: Pentru aflarea minimului se putea defini și funcția

$$f(x) = 3x^2 + 6\frac{1}{x^2} \text{ căreia i se poate determina minimul global.}$$

Răspunsul corect este d).

$$15. \text{ Calculăm } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = -4;$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = 0, \text{ de unde } S = -4$$

Răspunsul corect este c).

16. Ecuația este $3x^3 - 3x^2 + x = 0 \Rightarrow 0$ suma coeficienților lui x^3 și x este $3+1=4$.

Răspunsul corect este d).

$$17. D(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ -2 & x & 1-x \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -x^2. \text{ Rezultă } S = D(-1) + D(1) = -1 - 1 = -2$$

Răspunsul corect este **c**).

18. Ecuația $D=0$ devine pe rând $-2\sin^2 u + 2\cos^2 u = 0$, adică $4\cos^2 u - 2 = 0$.

Coeficienții lui $\cos^2 u$ și $\cos u$ sunt respectiv 4 și 0, deci suma lor este 4.

Răspunsul corect este **b**).

$$19. D(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & -2x \\ -1 & x & -1 \\ x & 0 & -x+1 \end{vmatrix} = x^3 - x + 1. \text{ Ecuația } D(x)=1 \text{ devine}$$

$x^3 - x + 1 = 1$ sau $x^3 - x = 0$ cu soluțiile $-1, 0, 1$. Suma lor este $S = 0$

Răspunsul corect este **a**).

20. Avem

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ -x & 1 & x \\ 0 & -x & 1 \end{vmatrix} = 1 + x^4 + x^2 + x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2.$$

$$\text{Din } D(x) = 4 \Rightarrow (x^2 + 1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + 1 = \pm 2.$$

Avem, $x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$
 $x^2 + 1 = -2 \Leftrightarrow x^2 = -3 \Leftrightarrow x = \pm i\sqrt{3}$. Rezultă $M = \{\pm 1, \pm i\sqrt{3}\}$, de unde

$$S = \sum_{x \in M} |x|^2 = |1|^2 + |-1|^2 + |i\sqrt{3}|^2 + |-i\sqrt{3}|^2 = 1 + 1 + 3 + 3 = 8.$$

Răspunsul corect este **b**).

21. Determinantul devine prin înlocuire:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ a-4 & b-4 & c-4 \end{vmatrix}$$

a căruia valoare este 0, scriindu-se ca sumă a doi determinanți.

Răspunsul corect este **b**).

22. Notăm cu D determinantul din enunț. Adunăm, de exemplu, toate liniile la ultima linie și scoțând factor comun obținem:

$$D = (x - a + b + c) \left[x^2 - (2a + b + c)x + (a + b)(a + c) + (b - c)^2 \right]$$

Ecuția $D = 0$ are rădăcina reală $x_1 = a - b - c$.

Ecuția

$$x^2 - (2a + b + c)x + (a + b)(a + c) + (b - c)^2 = 0$$

are discriminantul

$$\Delta = (2a + b + c)^2 - 4(a + b)(a + c) - 4(b - c)^2 = -3(b - c)^2$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow b = c$$

Atunci, $x_2 = x_3 = a + b$, iar $x_1 = a - 2b$.

Deci, $x_1 + x_2 + x_3 = 3a$.

Cazul $b \neq c$ implică, de asemenea, $x_1 + x_2 + x_3 = 3a$.

Răspunsul corect este e).

$$23. \quad D(x) = \det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{I}_3) = \begin{vmatrix} 2-x & -2 & 0 \\ -2 & 1-x & -2 \\ 0 & -2 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 3x^2 + 6x - 8 \quad \text{care}$$

descompus în factori se scrie $D(x) = -(x-1)(x+2)(x-4)$ cu soluțiile $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 4$, de unde $S = 7$

Răspunsul corect este d).

24. Adunând toate liniile la prima și dezvoltând, obținem:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = (x_1 + x_2 + x_3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) \left[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \right] \end{aligned}$$

Cum $x_1 + x_2 + x_3 = -1$, atunci din $\Delta = 0$ rezultă:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3.$$

Înmulțind această relație cu 2 obținem:

$$(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) = 0,$$

adică

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3.$$

Reciproc, dacă $x_1 = x_2 = x_3 \Rightarrow \Delta = 0$ (deoarece toate liniile sunt egale).

Din $x_1 + x_2 + x_3 = -1 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{1}{3}$.

Atunci, $a = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{1}{3}$, iar $b = -x_1x_2x_3 = \frac{1}{27}$.

Deci, $a = \frac{1}{3}$ și $b = \frac{1}{27}$.

Răspunsul corect este a).

25. Aplicând regula $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $a_{ij} = c_{ij} + r_{ij}$ unde c_{ij}, r_{ij} sunt câtul și

respectiv restul împărțirii lui i^2 la j , calculăm $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & 5 & 3 & 3 \\ 16 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Prin aplicarea operațiilor cu coloanele determinantului, respectiv scăderile $C_1 - C_2, C_2 - C_3, C_3 - C_4$, urmate de dezvoltarea acestuia obținem:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & 5 & 3 & 3 \\ 16 & 8 & 6 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 - C_2 \\ C_2 - C_3 \\ C_3 - C_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Răspunsul corect este d).

Observație: Pentru a găsi a_{34} împărțim 9 la 4 cu rest și obținem câtul 2 și restul 1. Atunci $a_{34} = 2 + 1 = 3$

$$26. \text{ Avem } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Atunci,}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ C_2 - 2C_1 \\ C_3 - 3C_1 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -4 \\ 3 & -4 & -5 & -8 \\ 4 & -2 & -9 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -4 & -5 & -8 \\ -2 & -9 & -11 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 - 3C_1 \\ C_3 - 4C_1 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -4 \\ -4 & 7 & 8 \\ -2 & -3 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(7-8) = -3.$$

Răspunsul corect este **b**).

Observație: $a_{34} = 4 - 3 = 1, a_{42} = \frac{4}{2} = 2, a_{43} = 3 - 4 = -1$.

$$27. \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^4 + a^2 + 2a - 2 = -(a-1)^2(a^2 + 2a + 2).$$

$$\det \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Pentru $a = 1$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de unde $\text{rang} \mathbf{A} = 1$.

Pentru $a \neq 1$, $\det \mathbf{A} \neq 0$ și $\text{rang} \mathbf{A} = 3$. Rezultă $M = \emptyset$.

Răspunsul corect este **b**).

$$28. \text{ Avem minorul } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \text{ de unde } \text{rang} \mathbf{A} \geq 2.$$

$$\text{rang} \mathbf{A} = 2 \text{ dacă } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 3a + 6 = 0 \text{ și } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3b + 6 = 0, \text{ de unde}$$

$$a = b = -2. \text{ Rezultă } S = |a| + |b| = 4.$$

Răspunsul corect este **d**).

$$29. \text{ Avem } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -a & a \\ -a-2 & a+2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1-a & a-1 \\ -2 & a-1 & 1-a \\ -2 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}.$$

Se observă că $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 0$ și $\text{rang}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 1$. Deasemenea toți minorii de ordin 2 ai matricii $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ sunt 0, deci $\text{rang}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = 1$. Atunci, $\forall a \in \mathbb{R}, \text{rang}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \text{rang}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = 2$ și $M = \mathbb{R}$.

Răspunsul corect este **a**).

30. Avem $\text{rang}(\mathbf{A}) \leq 3, \text{rang}(\mathbf{B}) \leq 3$ și alegând minorii nenuli $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$ din matricea $\mathbf{A}$ și respectiv $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ din matricea $\mathbf{B}$, rezultă $\text{rang}(\mathbf{A}) \geq 2, \text{rang}(\mathbf{B}) \geq 2$.

Atunci $\text{rang}(\mathbf{A}) + \text{rang}(\mathbf{B}) = 4 \Leftrightarrow \text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{B}) = 2$.

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2+a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a = 0.$$

În matricea $\mathbf{B}$ putem forma doi minori prin borduirea minorului nenul și anume:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ și } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & b \end{vmatrix} = 3b + 9 = 0 \Leftrightarrow b = -3.$$

Răspunsul corect este **b**).

$$31. \text{rang} \mathbf{A} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = a^2(a+3) = 0. \text{ Cum } a \neq 0 \text{ rezultă}$$

$$a = -3. \text{ Atunci } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & b \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & b^2 \end{pmatrix}, \text{ matrice care are rangul 2 dacă}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & b \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & b^2 \end{vmatrix} = 3(b^2 + b - 1) = 0, \text{ cu soluțiile } b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Rezultă, } M = \left\{ \left(-3, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right), \left(-3, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) \right\} \text{ și}$$

$$S = -3 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} - 3 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = -7$$

Răspunsul corect este **c**).

32. Prin calcul se determină inversele:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Rezultă } \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & 7 \\ 19 & -11 \end{pmatrix}$$

Răspunsul corect este **a**).

$$33. \det \mathbf{A} = 1 \Rightarrow \mathbf{A} \text{ inversabilă și } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{B} = 1 \Rightarrow \mathbf{B} \text{ inversabilă și } \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Soluția ecuației } \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \text{ este } \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -28 & 20 \\ 49 & -35 \end{pmatrix}, \text{ de unde}$$

$$S = 132.$$

Răspunsul corect este a).

$$34. \det \mathbf{A} = 1 \Rightarrow \mathbf{A} \text{ inversabilă și } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Soluția ecuației}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \text{ este } \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ de unde } S = 0.$$

Răspunsul corect este c).

$$35. \text{ Notăm } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix} \text{ și } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și ecuația se mai scrie}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

Întrucât $\det \mathbf{A} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A}$ este inversabilă și soluția este $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$.

Punem în evidență următoarea metodă mai convenabilă de calcul.

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{A}^4 = 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 9\mathbf{I}_3,$$

unde $\mathbf{I}_3$ este matricea unitate din $M_3(\mathbb{C})$.

Avem:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{9} \mathbf{A}^3 = \frac{1}{9} \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Înmulțind } \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Răspunsul corect este **c**).

36. Soluția ecuației este $\mathbf{X} \in M_{2,3}(\mathbb{C})$, $\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$, unde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det \mathbf{A} \neq 0; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Calculăm } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8}i & 0 \\ -\frac{1}{8}i & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și, deci, } \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} - \frac{1}{8}i & \frac{3}{8} + \frac{1}{8}i & -1 \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8}i & 1 \end{pmatrix}.$$

Răspunsul corect este **a**).

$$37. \text{ Avem } \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{A}^3 = \mathbf{0}_3.$$

$$\text{Atunci, cunoscând că } (\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I}_3 + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & a & b+ac \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Răspunsul corect este **b**).

38. Avem $\det \mathbf{A} = -2 \Rightarrow$ sistemul are soluție unică care se găsește ușor ca fiind $x_0 = 1, y_0 = -1, z_0 = -1$. Rezultă $S = x_0^{y_0} + y_0^{z_0} + z_0^{x_0} = -1$

Răspunsul corect este **b**).

39. Avem $\det \mathbf{A} = 22 \Rightarrow$ sistemul are soluție unică care se găsește ușor ca fiind $x_0 = \frac{10}{11}, y_0 = -\frac{2}{11}, z_0 = -\frac{5}{11}$. Rezultă $S = \max \{|x_0|, |y_0|, |z_0|\} = \frac{10}{11}$.

Răspunsul corect este **b**).

40. Avem $\det \mathbf{A} = 1 \Rightarrow$ sistemul are soluție unică care se găsește ușor ca fiind $x_0 = 9 - m, y_0 = m - 5, z_0 = m - 2$.

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 81 \Rightarrow (9-m)^2 + (m-5)^2 + (m-2)^2 = 81 \Rightarrow 3m^2 - 32m - 29 = 0,$$

Cu soluțiile $m_1 = 1, m_2 = \frac{29}{3}$. Suma $S = \frac{32}{3}$.

Răspunsul corect este **c**).

41. Avem $\det \mathbf{A} = 1 \Rightarrow$ sistemul are soluție unică care se găsește ușor ca fiind $x_0 = 3 - m, y_0 = m - 2, z_0 = m - 2$.

$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = (2-m)^2 + (m-2)^2 + (m-2)^2 = 3m^2 - 14m + 17$ expresie care este minimă pentru $m = \frac{14}{2 \cdot 3} = \frac{7}{3}$.

Răspunsul corect este **d**).

42. Fie matricea sistemului $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3a-1 & 2a & 3a+1 \\ 2a & 2a & 3a+1 \\ a+1 & a+1 & 2(a+1) \end{pmatrix}$.

Calculăm $\Delta = \det \mathbf{A} = (a+1)(a-1)^2 \neq 0$ pentru $a \neq 1$ și $a \neq -1$. În acest caz $\text{rang } \mathbf{A} = 3$ și sistemul este compatibil unic determinant, cu soluția:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-(a-1)^2(a+1)}{(a-1)^2(a+1)} = -1; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -\frac{3a^2+a-1}{a+1}; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = -\frac{2a^2+a}{a+1}.$$

Atunci, $x + y + z = -1 - \frac{3a^2+a-1}{a+1} + \frac{2a^2+a}{a+1} = -a$.

Răspunsul corect este **d**).

Dacă $3b - 2a + c = 0$, sistemul este compatibil, cu soluția $x = \frac{b+a}{5} + \frac{2}{5}z$,

$$y = \frac{(2b-3a)}{5} + \frac{19}{5}z, \text{ deci } S = \frac{21z-c}{5}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Răspunsul corect este **a**).

43. Efectuând transformări elementare asupra matricei sistemului, obținem:

$$\begin{pmatrix} m-3 & 1 \\ 1 & m-3 \end{pmatrix} L_1 \rightarrow L_2 \begin{pmatrix} 1 & m-3 \\ m-3 & 1 \end{pmatrix} L_2 \rightarrow L_2 - (m-3)L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & m-3 \\ 0 & -m^2+6m-8 \end{pmatrix} = \mathbf{A}'.$$

Cazul i) $-m^2 + 6m - 8 \neq 0 \Leftrightarrow -(m-2)(m-4) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2, 4$

$$\text{Atunci } L_2 \rightarrow \frac{1}{-m^2 + 6m - 8} L_2 \begin{pmatrix} 1 & m-3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} L_1 \rightarrow L_1 - (m-3)L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ obținem astfel soluția banală.}$$

$$\text{Cazul ii) } m = 2. \text{ Atunci } \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ cu soluția } x = y, y \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Cazul iii) } m = 4. \text{ Atunci } \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ cu soluția } x = -y, y \in \mathbb{R}.$$

Răspunsul corect este **b**).

44. Sistemul are soluție nebanală dacă determinatul matricii sistemului este 0. Atunci

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m+1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3m^2 + 5m - 2 = 0, \text{ cu soluțiile}$$

$$m_1 = -2, m_2 = \frac{1}{3}.$$

Răspunsul corect este **a**).

45. Matricea sistemului $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ are rangul cel puțin 2.

Atunci sistemul este compatibil nedeterminat dacă

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & b \end{pmatrix} = 2.$$

Rezultă minorii următori nuli, $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 7a - 4, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & b \end{vmatrix} = 3b - 1.$ De aici,

$$a = \frac{4}{7}, b = \frac{1}{3} \Rightarrow S = a + b = \frac{19}{21}.$$

Răspunsul corect este **b**).

46. Avem $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{A} = 0 \Rightarrow$ sistemul omogen este

compatibil nedeterminat. Soluția sa se poate găsi de forma:

$$\tilde{x} = -4\alpha, \tilde{y} = \alpha, \tilde{z} = 3\alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\tilde{y}^2 + 2\tilde{z} + \tilde{x} + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1 \text{ de unde } \tilde{x} = 4, \tilde{y} = -1, \tilde{z} = -3.$$

Rezultă $S = |\tilde{x}| + |\tilde{y}| + |\tilde{z}| = 8.$

Răspunsul corect este d).

47. Matricea sistemului este $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & a \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Calculăm

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & a \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -2a + 8. \text{ Dacă } \det \mathbf{A} \neq 0 \text{ adică pentru } a \neq 4 \text{ sistemul este}$$

compatibil determinat.

Dacă $a = 4$ avem matricea sistemului $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ și matricea extinsă a

sistemului $\overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 & b \end{pmatrix}$. Sistemul este compatibil nedeterminat dacă

$$\text{rang} \mathbf{A} = \text{rang} \overline{\mathbf{A}}.$$

$$\text{Cum } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang} \mathbf{A} = 2.$$

$$\text{Acum, } \text{rang} \mathbf{A} = \text{rang} \overline{\mathbf{A}} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -4 & b \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow b - 6 = 0 \Leftrightarrow b = 6.$$

Așadar dacă $a = 4, b \neq 6$ sistemul este incompatibil.

Răspunsul corect este b).

48. Matricea sistemului $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$. Determinantul său este

$$\det \mathbf{A} = (a-1)(a^2b + ab + b - a - 2).$$

Dacă $a \neq 1$ și $b \neq \frac{a+2}{a^2+a+1}$, $\det \mathbf{A} \neq 0$ și sistemul este compatibil determinat deci afirmația a) este falsă.

Dacă $a = 1$, $\det \mathbf{A} = 0$, sistemul devine,
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + bz = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + bz = b \end{cases}$$

și cum $\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & b \end{pmatrix}$ sistemul este compatibil nedeterminat pentru orice valoare reală a lui b . Afirmațiile b) și e) sunt false.

Fie acum $a \neq 1, b = \frac{a+2}{a^2+a+1}$. Atunci $\det \mathbf{A} = 0$ și sistemul este compatibil (nedeterminat) dacă

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{a+2}{a^2+a+1} \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 & a \\ 1 & 1 & \frac{a+2}{a^2+a+1} & \frac{a+2}{a^2+a+1} \end{pmatrix} = 2.$$

Acest lucru se întâmplă dacă

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & \frac{a+2}{a^2+a+1} \end{vmatrix} = -(a-1)^2 = 0, \text{ ceea ce nu are loc pentru } a \neq 1.$$

Așadar sistemul este incompatibil. Afirmația c) este corectă și afirmația d) este incorect

Răspunsul corect este c).

49. Avem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ de unde}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Răspunsul corect este **c**).

50. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ și notăm cu

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ permutarea identică. Calculăm succesiv:

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e$$

Atunci $\sigma^{2024} = \sigma^{3 \cdot 674 + 2} = \sigma^{3 \cdot 674} \circ \sigma^2 = (\sigma^3)^{674} \circ \sigma^2 = e \circ \sigma^2 = \sigma^2$

$$\tau^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad . \text{ Atunci:}$$

$$\tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e$$

$\tau^{1012} = \tau^{4 \cdot 253} = (\tau^4)^{253} = e$. Ecuația devine $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ cu

soluția $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Răspunsul corect este **a**).

ENUNȚURI

ALGEBRĂ clasa a XII-a

1. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = xy + 5x + 5y + 20$. Suma S a elementelor mulțimii $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x * x = x\}$ este:

a) $S = -1$; **b)** $S = 9$; **c)** $S = -9$; **d)** $S = 5$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ și mulțimea

$$M = \{X(p) = I_2 + pA \mid p \in \mathbb{R}^+\}.$$

Găsiți valoarea lui p , pentru care $(X(p))^2 = I_2 + 24A$.

a) $p = 3$; **b)** $p = 4$; **c)** $p = \frac{5}{3}$; **d)** $p = \frac{70}{21}$.

3. Pe mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ se consideră legea de compoziție "*" definită prin $x * y = (x - 2024)(y - 2024) + 2024, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ și mulțimea $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ este simetrizabil în raport cu legea } *\}$.

Atunci valoarea lui $S = \sum_{x \in M} x$ este:

a) $S = 2$; **b)** $S = 4048$; **c)** $S = 2024$; **d)** $S = 2025$.

4. Pe mulțimea numerelor reale pozitive se consideră legea de compoziție $x * y = \frac{\beta x + y}{xy + \alpha}$, unde $x > 0, y > 0$, iar parametrii α și β sunt reali și pozitivi.

Mulțimea $M = \{(\alpha, \beta) \in (0, \infty)^2 \mid \text{legea "*" are proprietatea de asociativitate}\}$ este:

a) $M = \{(1,1), (2,1)\}$; **b)** $M = \{(1,1), (2,2)\}$; **c)** $M = \{(1,1)\}$; **d)** $M = \emptyset$;

5. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = xy + 2x + 2y + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Calculați suma S a simetricelor numerelor $x = \frac{3}{2}$, $x = 1$.

a) $S = -\frac{11}{2}$; **b)** $S = \frac{47}{23}$; **c)** $S = \frac{-5}{3}$; **d)** $S = \frac{-71}{21}$.

6. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = axy + by$, unde $x, y \in \mathbb{R}$ și $a, b \in \mathbb{R}$.

Fie $M = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (\mathbb{R}, *) \text{ este monoid comutativ} \}$. Atunci:

a) $M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \{0\}$; **b)** $M = \emptyset$; **c)** $M = \mathbb{R}^2$; **d)** $M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

7. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = \alpha xy + \beta(x + y) + \gamma$, unde $x, y \in \mathbb{R}$ și $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta \neq 1$. Relația dintre parametrii α, β, γ pentru care $(\mathbb{R}, *)$ este monoid comutativ este:

a) $\alpha\gamma + \beta^2 + \beta = 0$; **b)** $\alpha\gamma - \beta^2 + \beta = 0$; **c)** $\alpha\gamma = -\beta$; **d)** $\alpha\gamma + \beta^2 - \beta = 0$.

8. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1)$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Afirmatia corectă este:

- a)** A1: „ $(\mathbb{R}, *)$ este grup comutativ”
b) A2: „ $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$ este grup comutativ”
c) A3: „ $x_0 = 1$ este element neutru”
d) A4: „ $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ este grup comutativ”.

9. Fie $G = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = k, k \in \mathbb{R}\}$. Mulțimea M a valorilor parametrului k pentru care $(G, \cdot)$ este grup este:

a) $M = \{0\}$; **b)** $M = \{1\}$; **c)** $M = \{-1, 1\}$; **d)** $M = \{-1\}$.

10. Pe mulțimea numerelor reale strict pozitive se consideră legea de compoziție $x * y = x^{\log_2 y}$, $x, y \in (0, \infty)$. Dacă e este elementul neutru al acestei legi, atunci:

a) $e \in (2, 3]$; **b)** $e = 1$; **c)** $e \in (1, 2]$; **d)** $e \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

11. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ din grupul S_4 al permutărilor de ordin 4. Atunci soluția ecuației $\sigma^{2012} \circ x = \sigma^{19}$ este:

- a) $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; c) $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;
d) $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

12. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se consideră legea de compoziție $x * y = x^2 y^2 - 4x^2 - 4y^2 + x + y + 14$. Atunci elementul neutru al acestei legi verifică:

- a) este divizibil cu 3; b) este număr par; c) este divizibil cu 4; d) este un număr impar.

13. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = (x + 3)(y + 3) - 3$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Valoarea numărului natural n pentru care $C_n^2 * C_n^2 = 13$ este:

- a) $n = 3$; b) $n = 2$; c) $n = 4$; d) $n = 13$.

14. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = xy - 10x - 10y + 110$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Valoarea expresiei $E = \underbrace{110 * 110 * \dots * 110}_{n \text{ ori}}$, $n \geq 2$ natural este:

- a) $E = 110$; b) $E = 110n$; c) $E = 100n + 10$; d) $E = 100^n + 10$.

15. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = xy + 3x + ay + b$, unde $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Valorile parametrilor a, b pentru care se verifică relația $(-3) * x = -3, \forall x \in \mathbb{R}$ sunt:

- a) $\begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases}$; d) $\begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \end{cases}$.

16. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = xy - x - y + 2$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Valoarea expresiei $E = \frac{\sqrt{1}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} * \dots * \frac{\sqrt{2017}}{2}$ este:

a) $E = 2017$; b) $E = 1$; c) $E = 0$; d) $E = \frac{2017}{2}$.

17. Pe mulțimea numerelor reale strict pozitive se consideră legea de compoziție "*" definită prin $x * y = \frac{1}{2}(x^{\ln y} + y^{\ln x})$, $\forall x, y \in (0, \infty)$. Dacă notăm prin α elementul neutru al legii atunci:

a) $\alpha \in (0, 1)$; b) $\alpha \in (1, 2)$; c) $\alpha \in (2, 3)$; d) $\alpha \in (3, 4)$.

18. Numărul rădăcinilor ecuației $\hat{1}2x = \hat{0}$ în inelul $\mathbb{Z}_{24}$ al claselor de resturi modulo 24 este:

a) 1; b) 3; c) 12; d) 6.

19. Inversul elementului $E = (\hat{1} + \hat{3} \cdot \hat{4}) \cdot (\hat{5} + \hat{2} \cdot \hat{3}) \in \mathbb{Z}_7$ în corpul $\mathbb{Z}_7$ al claselor de resturi modulo 7 este:

a) $\hat{2}$; b) $\hat{5}$; c) $\hat{3}$; d) $\hat{4}$.

20. Numărul elementelor neinvertibile ale inelului $\mathbb{Z}_{24}$ al claselor de resturi modulo 24 este:

a) 16; b) 6; c) 2; d) 12.

21. În corpul $\mathbb{Z}_5$ al claselor de resturi modulo 5, se consideră sistemul
$$\begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{1} \\ \hat{2}x + y = \hat{0} \end{cases}$$
. Dacă $(x, y) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ este soluția sistemului, iar $\alpha = x \cdot y + x + y$, atunci:

a) $\alpha = \hat{3}$; b) $\alpha = \hat{1}$; c) $\alpha = \hat{0}$; d) $\alpha = \hat{4}$.

22. Fie mulțimea $M = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \mid \hat{2}x + y = \hat{3}\}$, unde $\mathbb{Z}_5$ este corpul claselor de resturi modulo 5. Atunci valoarea lui $S = \sum_{(x, y) \in M} x \cdot y$ este:

a) $S = \hat{1}$; **b)** $S = \hat{2}$; **c)** $S = \hat{0}$; **d)** $S = \hat{4}$.

23. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $P(X) = X^4 - 3X^3 + (m^2 - 1)X^2 + (2m + 3)X - 2 \in \mathbb{R}[X]$ și mulțimea $M = \{m \in \mathbb{R} \mid X - 1 \text{ divide } P(X)\}$. Atunci numărul $S = \sum_{m \in M} m^2$ are valoarea:

a) $S = 8$; **b)** $S = 4$; **c)** $S = 2$; **d)** $S = 3$;

24. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $P(X) = X^4 - 2X^3 + aX^2 + 3X - b \in \mathbb{R}[X]$. Valorile parametrilor reali a și b pentru care restul împărțirii lui $P(X)$ la $X^2 - X - 1$ este $2X + 1$ sunt

a) $a = -4, b = 1$; **b)** $a = 4, b = -3$; **c)** $a = -4, b = -3$; **d)** $a = 4, b = 4$.

25. Se consideră polinomul $P(X) = X^3 - 3X^2 + X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Valoarea numărului complex $r = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ este:

a) $r = 15$; **b)** $r = i$; **c)** $r = -2i$; **d)** 0 .

26. Se consideră polinomul $P(X) = X^3 - (m^2 + 1)X^2 + m^2X - 2$, $m \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Valorile parametrului real m pentru care $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = -1$ se află în mulțimea:

a) $A = (-\infty, -3]$; **b)** $A = [-2, 2]$; **c)** $A = [4, \infty)$; **d)** $A = [-1, 1]$.

27. Fie polinomul $f = X^3 - aX^2 + 2X + a - 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$, unde a este un număr real.

Mulțimea $A = \{a \in \mathbb{R} \mid (2x_1 - 3x_1^2)(2x_2 - 3x_2^2)(2x_3 - 3x_3^2) = 1 - a\}$.

a) $A = \{3\}$; **b)** $A = \emptyset$; **c)** $A = \{-1, 1\}$; **d)** $A = \{0, 1\}$.

28. Fie polinomul $P(X) = X^3 - 2X^2 - X - 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Atunci polinomul $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ ce are rădăcinile $y_1 = \frac{1}{x_1}, y_2 = \frac{1}{x_2}, y_3 = \frac{1}{x_3}$ este

a) $Q(X) = X^3 - 2X^2 - X - 1$; **b)** $Q(X) = X^3 + X^2 + 2X - 1$;

c) $Q(X) = X^3 - X^2 + 2X - 1$; **d)** $Q(X) = X^3 + X^2 - 2X + 1$;

29. Fie polinomul $P(X) = X^4 - 2X^3 + (m+1)X^2 + 2mX - 4 \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ și mulțimea $A = \{m \in \mathbb{R} \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$. Atunci:

a) $A = \emptyset$; **b)** $A = \{1\}$; **c)** $A = \{0\}$; **d)** $A = \{1, 2\}$.

30. Fie polinoamele $f = X^3 + aX^2 + (b-2)X + 2a-1$, $g = (x-1)^2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și f se divide cu g . Determinați suma $S = a^2 - 2b$.

a) $S = -4$; **b)** $S = 16$; **c)** $S = 10$; **d)** $S = 14$.

31. Valoarea expresiei $E = a^2 + b^2 + c^2$, unde a, b, c sunt acei parametri reali pentru care polinomul $X^4 + aX^3 + 2X^2 + bX + c$ este divizibil prin $(X-1)^2(X+1)$ este:

a) $E = 14$; **b)** $E = 41$; **c)** $E = 0$; **d)** $E = 36$.

32. Dacă polinomul $R(X)$ este restul împărțirii polinomului $P(X) = nX^n + (n-1)X^{n-1} + \dots + 2X^2 + X$, $n \in \mathbb{N}, n > 5$ la polinomul $X^2 + X - 2$ atunci $R(1)$ este:

a) n^2 ; **b)** $\frac{n^2 + n}{2}$; **c)** $\frac{n^2 - n}{2}$; **d)** $n^2 + n$.

33. Fie polinomul $P(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$, astfel încât $x_1 = 1 - i$ este o rădăcină a sa. Atunci valoarea sumei $S = a + b$ este:

a) $S = 0$; **b)** $S = 1$; **c)** $S = i$; **d)** $S = -2$.

34. Fie polinomul $P(X) = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 1 \in \mathbb{Q}[X]$, astfel încât $x_1 = -1 - \sqrt{3}$ este o rădăcină a sa. Afirmatia corectă este:

- a)** $a^2 + b^2 < 1$; **b)** $a^2 - b^2 < 0$; **c)** $4a^2 - 81b^2 = 0$; **d)** $4a^2 - 9b^2 = 0$.

35. Fie polinomul

$$P(X) = 6X^5 - 13X^4 + 13X^3 - 6X^2 - X + 1.$$

Afirmatia corectă este:

- a)** A1: „Polinomul $P(X)$ nu are rădăcini întregi”;
b) A2: „Polinomul $P(X)$ are exact două rădăcini reale”;
c) A3: „Polinomul $P(X)$ are numai trei rădăcini raționale”;
d) A4: „Polinomul $P(X)$ are rădăcini duble”.

36. Fie polinomul $P(X) = X^3 - 2X^2 + aX - 1 \in \mathbb{R}[X]$. Valoarea parametrului real a pentru care restul împărțirii polinomului $P(X+1)$ la $X-1$ este 2 este :

- a)** $\frac{1}{2}$; **b)** $\frac{3}{2}$; **c)** $-\frac{1}{2}$; **d)** $-\frac{3}{2}$.

37. Să se determine parametrii reali $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = 2X^4 - mX^3 + (2-n)X - 2$ să admită rădăcina $x_1 = i$ și $f'(1) = 2$.

- a)** $m = \frac{3}{2}; n = \frac{7}{2}$; **b)** $m = 3; n = \frac{-7}{2}$; **c)** $m = -\frac{3}{2}; n = 1$ **d)** $m = \frac{3}{2}; n = -\frac{7}{2}$.

38. Restul împărțirii polinomului $P(X) = X^{2017} - 2X + 4$ la polinomul $Q(X) = (X+1)^2$ este:

- a)** $2014X + 2019$; **b)** $2015X + 2020$; **c)** 5 ; **d)** $-X + 4$.

39. Valoarea parametrului m din inelul $\mathbb{Z}_3$ al claselor de resturi modulo 3 pentru care polinomul este ireductibil în inelul de polinoame $\mathbb{Z}_3[X]$ se găsește în mulțimea:

- a)** $\{\bar{0}\}$; **b)** $\emptyset$; **c)** $\{\bar{1}\}$; **d)** $\{\bar{2}\}$.

40. Valoarea parametrului real m pentru care polinomul

$$P(X) = (X^2 + 2X + 1)^{3n+1} + X^2 + m + 1 \in \mathbb{R}[X], n \in \mathbb{N}^*$$

este divizibil prin polinomul $X^2 + X + 1$ este:

a) $m = 1$; **b)** $m = 0$; **c)** $m = -1$; **d)** $m = 2$.

41. Restul $r(X)$ al împărțirii unui polinom oarecare $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ la polinomul $(X - a)(X - b)$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ este:

a) $P(a)X + P(b)$; **b)** $P(b)X + P(a)$; **c)** $\frac{P(a)}{a-b}X + \frac{P(b)}{b-a}$;

d) $\frac{P(b) - P(a)}{b-a}X + \frac{bP(a) - aP(b)}{b-a}$.

42. Dacă $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ sunt rădăcinile ecuației polinomiale

$$x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0,$$

atunci valoarea expresiei $E = x_4 - x_1 + x_3 - x_2$ este:

a) $E = 2\sqrt{2}$; **b)** $E = \sqrt{3} + \sqrt{5}$; **c)** $E = 2\sqrt{3} + \sqrt{5}$; **d)** $2\sqrt{5}$.

43. Mulțimea valorilor parametrului real m pentru care ecuația polinomială

$$x^4 - (m+1)x^2 + m = 0$$

are toate soluțiile reale este:

a) $\mathbb{R}$; **b)** $\emptyset$; **c)** $(-1, \infty)$; **d)** $[0, \infty)$.

44. Valoarea parametrului real α pentru care ecuația polinomială

$$(x-1)^2(x^2+1) = (\alpha+1)x^2$$

admite două rădăcini duble este:

a) $\alpha = -2$; **b)** $\alpha = -1$; **c)** $\alpha = 0$; **d)** $\alpha = 2$.

45. În inelul $\mathbb{R}[X]$ al polinoamelor cu coeficienți reali se consideră polinoamele $P(X) = X^3 + mX^2 + nX - 6$, $Q(X) = X^2 - X - m$ (m și n sunt doi parametri reali) și mulțimea $A = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid Q(X) \text{ divide } P(X)\}$. Valoarea numărului $y = \sum_{(m,n) \in A} (m^2 + n^2)$ este:

a) $y = 63$; **b)** $y = 64$; **c)** $y = 62$; **d)** $y = 56$.

46. Restul împărțirii polinomului $P(X) = (1 + X + X^2)^{1006}$ la polinomul $X(X^2 - 1)$ este:

a) $\frac{3^{1006} - 1}{2}X^2 + \frac{3^{1006} - 1}{2}X + 1$; **b)** $\frac{3^{1006} - 1}{2}X^2 + \frac{3^{1006} + 1}{2}X + 1$;
c) $\frac{3^{1006} + 1}{2}X^2 + \frac{3^{1006} - 1}{2}X + 1$; **d)** $\frac{3^{1006} + 1}{2}X^2 + \frac{3^{1006} + 1}{2}X + 1$.

47. Restul împărțirii polinomului $P(X) = 2(3 - X)^n + 6(X + 1)^n - 3$ la polinomul $Q(X) = X^2 - 2X - 3$ este:

a) $4^n X + 3(4^n - 1)$; **b)** $3 \cdot 4^n X + 4^n$; **c)** $4^n X - 3(4^n - 1)$; **d)** $4^n X + 4^n$.

48. Fie polinomul $P(X) = \hat{2}X^4 + \hat{3}X^3 + X^2 + \hat{2}X + \hat{4} \in \mathbb{Z}_5[X]$. Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $X^2 + \hat{2}X + \hat{3}$ este:

a) $X + \hat{1}$; **b)** $\hat{3}X + \hat{1}$; **c)** $\hat{2}X$; **d)** $\hat{3}X + \hat{2}$.

49. Fie polinomul $P(X) = X^4 + \hat{2}X^3 + aX^2 + (a + \hat{1})X + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$ și mulțimea $M = \{a \in \mathbb{Z}_3 \mid P(X) \text{ se divide prin } X + \hat{2}\}$. Atunci:

a) $M = \emptyset$; **b)** $M = \{\hat{2}\}$; **c)** $M = \{\hat{1}\}$; **d)** $M = \{\hat{0}\}$.

50. Fie polinomul $P(X) = \hat{3}X^4 + \hat{2}X^3 + aX^2 + \hat{4}X + b \in \mathbb{Z}_5[X]$ și mulțimea $M = \{(a, b) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \mid P(X) \text{ se divide prin } X^2 + \hat{3}X\}$. Atunci

$S = \sum_{(a,b) \in M} (a+b)$ este:

a) $S = \hat{1}$; **b)** $S = \hat{4}$; **c)** $S = \hat{2}$; **d)** $S = \hat{0}$.

SOLUȚII

ALGEBRĂ clasa a XII-a

1. Din relația $x * y = xy + 5x + 5y + 20 \Rightarrow x * x = x^2 + 10x + 20 \Rightarrow x^2 + 10x + 20 = x \Rightarrow x^2 + 9x + 20 = 0 \Rightarrow x = 4$ sau $x = 5 \Rightarrow S = 9$.

Răspunsul corect este b).

2. Se observă că

$X(p) \cdot X(q) = X(p + q + 2pq) \Rightarrow (X(p))^2 = X(2p + 2p^2)$. Dar $I_2 + 24A = X(24) \Rightarrow 2p^2 + 2p = 24 \Rightarrow p = -4$, sau $p = 3$. Dar $p > 0 \Rightarrow p = 3$.

Răspunsul corect este a).

3. Calculul elementului neutru al legii "*":

$x * e = e * x = e, \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x - 2024)(e - 2024) + 2024 = x, \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x - 2024)(e - 2024) = x - 2024, \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow e - 2024 = 1 \Leftrightarrow e = 2025$.

Elementele simetrizabile:

$x * x' = x' * x = 2025 \Leftrightarrow (x - 2024)(x' - 2024) + 2024 = 2025 \Leftrightarrow$

$(x - 2024)(x' - 2024) = 1 \Leftrightarrow x' - 2024 = \frac{1}{x - 2024} \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{x - 2024} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x - 2024 \in \{-1, 1\}$

Avem $x - 2024 = 1 \Leftrightarrow x = 2025$ iar din $x - 2024 = -1 \Leftrightarrow x = 2023$.

Rezultă $M = \{2023, 2025\}$, de unde $S = \sum_{x \in M} x = 2023 + 2025 = 4048$.

Răspunsul corect este b).

4. Relația de asociativitate a legii de compoziție se scrie $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in (0, \infty)$. Această egalitate este echivalentă cu

$\frac{\beta^2 x + \beta y + \alpha z + xyz}{\beta xz + yz + \alpha xy + \alpha^2} = \frac{\beta xyz + \alpha \beta x + \beta y + z}{\beta xy + xz + \alpha yz + \alpha^2}, \forall x, y, z \in (0, \infty)$.

Prin identificare se găsesc valorile $\alpha = \beta = 1$.

Răspunsul corect este c).

5. Pentru a determina elementele simetrice cerute, este necesar să găsim mai întâi elementul neutru.

Dacă e este element neutru, atunci $e * x = x * e = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Rezultă relațiile $xe + 2x + 2e + 2 = ex + 2e + 2x + 2 = x, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde $e = 1$.

Acum, dacă x' este simetricul lui x față de legea "*", atunci are loc relația

$$x * x' = x' * x = 1 \text{ sau } xx' + 2x + 2x' + 2 = x, \text{ de unde rezultă } x' = \frac{-2x-3}{x+2}, x \neq -2.$$

$$\text{Dacă } x = \frac{3}{2} \Rightarrow x' = -\frac{12}{7}; x = 1 \Rightarrow x' = -\frac{5}{3} \Rightarrow S = -\frac{71}{21}.$$

Răspunsul corect este d).

6. Pentru ca $(\mathbb{R}, *)$ să fie monoid comutativ, este necesar ca legea de compoziție să fie bine (corect) definită, asociativă, comutativă și să admită un element neutru. Se observă imediat că pentru orice două numere reale x și y , operația lor $x * y$ are sens și este un număr real, deci legea este corect definită.

Comutativitatea legii presupune verificarea relației $x * y = y * x, \forall x, y \in \mathbb{R}$, adică $axy + by = ayx + bx, \forall x \in \mathbb{R}$.

Rezultă $b = 0$ și legea devine astfel $x * y = axy$. Se verifică imediat că legea este asociativă. Legea are element neutru dacă există un număr real e astfel încât $e * x = x * e = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Rezultă că $axe = x, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde $e = \frac{1}{a}, a \neq 0$.

Atunci, $M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \{0\}$.

Răspunsul corect este a).

7. Se observă imediat că legea este bine definită și comutativă, deci a mai rămas ca legea să fie asociativă și să admită un element neutru. Dacă punem condiția ca legea să admită ca element neutru numărul real, e , atunci

$$e * x = x * e = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

De aici rezultă $x(\alpha e + \beta - 1) + \beta e + \gamma = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde condițiile $\alpha e + \beta - 1 = 0$ și $\beta e + \gamma = 0$, sau $e = \frac{1-\beta}{\alpha} = -\frac{\gamma}{\beta}$. Imediat rezultă $\alpha\gamma + \beta - \beta^2 = 0$.

Se verifică apoi ușor că din relația de asociativitate reiese aceeași condiție de îndeplinit. Variantele a), c), d) sunt incorecte deoarece ar rezulta $\beta = 0$ sau $\beta = 1$ sau $\alpha = 0$ sau $\gamma = 0$.

Răspunsul corect este b).

8. Se observă imediat că legea este bine definită, este comutativă și asociativă. Elementul neutru se determină din relația $e * x = x * e = x, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde $e = -1$. Un element x este simetrizabil în raport cu legea "*", dacă există un număr real notat x' , astfel încât $x' * x = x * x' = -1$. Rezultă imediat $x' = \frac{-3-x}{1-x}, x \neq 1$. Reiese, de asemenea, că 1 nu este simetrizabil și $x' \neq 1, \forall x \neq 1$.

Atunci $x * y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1) \neq 1$ pentru $x \neq 1$ și $y \neq 1$. Rezultă că $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție. Așadar $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ este grup comutativ.

Răspunsul corect este d).

9. O primă condiție pentru ca $(G, \cdot)$ să fie grup este ca G să fie parte stabilă a mulțimii $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor. Pentru $A, B \in G, A \cdot B \in G \Leftrightarrow \det(A \cdot B) = k$. Se știe că $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, deci $k^2 = k$, de unde $k = 0$ sau $k = 1$. Însă matricele cu determinantul zero nu sunt inversabile, deci rămâne $k = 1$. Atunci inclusiv matricea identică de ordin 2 și inversa unei matrice din G rămâne tot în G , deci $(G, \cdot)$ este grup.

Răspunsul corect este b).

10. Legea are element neutru dacă există un număr real strict pozitiv e astfel încât $e * x = x * e = x, \forall x > 0$. Rezultă relația

$$x^{\log_2 e} = e^{\log_2 x} = x, \forall x > 0 \Rightarrow \log_2 e = 1 \Rightarrow e = 2.$$

Se verifică imediat că $2^{\log_2 x} = x, \forall x > 0$, deci elementul neutru este 2.

Răspunsul corect este c).

11. $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ = permutarea identică. Atunci

$$\sigma^{2012} \circ x = \sigma^{19} \Leftrightarrow \sigma^{670 \cdot 3 + 2} \circ x = \sigma^{6 \cdot 3 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma^2 \circ x = \sigma \Leftrightarrow x = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Răspunsul corect este c).

12. Legea are element neutru dacă există un număr întreg e astfel încât $e * x = x * e = x, \forall x \in \mathbb{Z}$. Se observă imediat că legea este comutativă și atunci elementul neutru e trebuie să verifice

$$x^2 e^2 - 4x^2 - 4e^2 + x + e + 14 = x, \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x^2(e^2 - 4) - 4e^2 + e + 14 = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$$

Atunci $e = 2$.

Răspunsul corect este **b**).

13.

$$C_n^2 * C_n^2 = 13 \Leftrightarrow (C_n^2 + 3)(C_n^2 + 3) - 3 = 13 \Leftrightarrow \left(\frac{n^2 - n}{2} + 3\right)^2 = 16 \Rightarrow \frac{n^2 - n}{2} + 3 = 4$$

Rezultă ecuația de grad doi $n^2 - n - 2 = 0$, cu singura soluție acceptabilă $n = 2$.

Răspunsul corect este **b**).

14. Se verifică dacă legea este asociativă și se scrie expresia legii sub forma

$$x * y = (x - 10)(y - 10) + 10.$$

Atunci

$$110 * 110 = 10^4 + 10, 110 * 110 * 110 = (10^4 + 10) * (10^2 + 10) = 10^6 + 10.$$

Se găsește prin inducție $E = \underbrace{110 * 110 * \dots * 110}_{n \text{ ori}} = 10^{2n} + 10 = 100^n + 10$.

Răspunsul corect este **d**).

15. $-3 * x = -3x - 9 + ax + b = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a - 3)x + b - 6 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Rezultă $a = 3, b = 6$.

Răspunsul corect este **a**).

16. Legea de compoziție se scrie în forma echivalentă $x * y = (x - 1)(y - 1) + 1$. Se verifică ușor că legea este asociativă și

$x * 1 = 1 * x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Deoarece legea este asociativă și cum $\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$ este un

termen în compunerea $\frac{\sqrt{1}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} * \dots * \frac{\sqrt{2017}}{2}$, rezultă $E = 1$.

Răspunsul corect este **b**).

17. Folosind definiția elementului neutru:

$\alpha * x = x * \alpha = x, \forall x > 0$ și ținând cont de comutativitatea legii de compoziție rezultă că: $\alpha^{\ln x} + x^{\ln \alpha} = 2x, \forall x > 0$, ce are unica soluție $\alpha = e \in (2, 3)$.

Răspunsul corect este c).

18. Ecuația $\widehat{12}x = \widehat{0}$ va avea ca soluții toate clasele de resturi ale căror reprezentanți se divid prin 2, respectiv $\widehat{0}, \widehat{2}, \widehat{4}, \widehat{6}, \widehat{8}, \widehat{10}, \widehat{12}, \widehat{14}, \widehat{16}, \widehat{18}, \widehat{20}, \widehat{22}$, în număr de 12.

Răspunsul corect este c).

19. Avem în $\mathbb{Z}_7$, $E = (\widehat{1} + \widehat{3} \cdot \widehat{4}) \cdot (\widehat{5} + \widehat{2} \cdot \widehat{3}) = \widehat{13} \cdot \widehat{11} = \widehat{6} \cdot \widehat{4} = \widehat{24} = \widehat{3}$. Întrucât $\widehat{3} \cdot \widehat{5} = \widehat{15} = \widehat{1}$, rezultă că inversul lui $\widehat{3}$ este $\widehat{5}$.

Răspunsul corect este b).

20. Un element (clasă resturi) al inelului $\mathbb{Z}_{24}$, este neinversabil dacă reprezentantul clasei de resturi are un divizor comun cu 24. Așadar, elementele neinversabile sunt $\widehat{0}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}, \widehat{6}, \widehat{8}, \widehat{9}, \widehat{10}, \widehat{12}, \widehat{14}, \widehat{15}, \widehat{16}, \widehat{18}, \widehat{20}, \widehat{22}$, în număr de 16.

Răspunsul corect este a).

21. Avem sistemul cu coeficienți în corpul $\mathbb{Z}_5$:
$$\begin{cases} \widehat{3}x + \widehat{2}y = \widehat{1} \\ \widehat{2}x + y = \widehat{0} \end{cases}$$

Din a doua ecuație scoatem relația $y = -\widehat{2}x = \widehat{3}x$, care introdusă în prima ecuație generează $\widehat{3}x + \widehat{2} \cdot \widehat{3}x = \widehat{1} \Leftrightarrow \widehat{3}x + \widehat{6}x = \widehat{1} \Leftrightarrow \widehat{9}x = \widehat{1} \Leftrightarrow \widehat{4}x = \widehat{1} \Leftrightarrow x = \widehat{4}$. Atunci $y = \widehat{3} \cdot \widehat{4} = \widehat{12} = \widehat{2}$ și $\alpha = x \cdot y + x + y = \widehat{4} \cdot \widehat{2} + \widehat{4} + \widehat{2} = \widehat{8} + \widehat{6} = \widehat{3} + \widehat{1} = \widehat{4}$

Răspunsul corect este d).

22. Mulțimea $M = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \mid \widehat{2}x + y = \widehat{3}\}$ se determină rezolvând ecuația $\widehat{2}x + y = \widehat{3}$ în corpul $\mathbb{Z}_5$.

Considerăm succesiv:

$$y = \hat{0} \Rightarrow \hat{2}x = \hat{3} \Rightarrow x = \hat{2}^{-1}\hat{3} = \hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{9} = \hat{4}$$

$$y = \hat{1} \Rightarrow \hat{2}x = \hat{2} \Rightarrow x = \hat{1}$$

$$y = \hat{2} \Rightarrow \hat{2}x = \hat{1} \Rightarrow x = \hat{2}^{-1} = \hat{3}$$

$$y = \hat{3} \Rightarrow \hat{2}x = \hat{0} \Rightarrow x = \hat{0}$$

$$y = \hat{4} \Rightarrow \hat{2}x = -\hat{1} = \hat{4} \Rightarrow x = \hat{2}$$

$$\text{Rezultă, } S = \hat{4} \cdot \hat{0} + \hat{1} \cdot \hat{1} + \hat{3} \cdot \hat{2} + \hat{0} \cdot \hat{3} + \hat{2} \cdot \hat{4} = \hat{1} + \hat{6} + \hat{8} = \hat{15} = \hat{0}.$$

Răspunsul corect este **c**).

23. Conform teoremei lui Bezout $X - 1 \Leftrightarrow P(X) \Leftrightarrow P(1) = 0$.

$$P(1) = m^2 + 2m - 2 \text{ iar } P(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Rezultă $M = \{-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}\}$, de unde :

$$S = \sum_{m \in M} m^2 = (-1 - \sqrt{3})^2 + (-1 + \sqrt{3})^2 = 8$$

Răspunsul corect este **a**).

24. Prin împărțirea polinomului $P(X) = X^4 - 2X^3 + aX^2 + 3X - b \in \mathbb{R}[X]$

la $X^2 - X - 1$ se obține câtul $X^2 + X + a + 2$ și restul $(a + 6)X + a - b + 2$.

Din egalitatea $(a + 6)X + a - b + 2 = 2X + 1$ rezultă sistemul:

$$\begin{cases} a + 6 = 2 \\ a - b + 2 = 1 \end{cases} \text{ cu soluția } a = -4, b = -3.$$

Răspunsul corect este **c**).

25. Cum x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului $P(X) = X^3 - 3X^2 + X + 1$, rezultă

$$P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = 0,$$

adică relațiile
$$\begin{cases} x_1^3 - 3x_1^2 + x_1 + 1 = 0 \\ x_2^3 - 3x_2^2 + x_2 + 1 = 0 \\ x_3^3 - 3x_3^2 + x_3 + 1 = 0 \end{cases}$$
. Notăm $s_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n, n \in \mathbb{Z}$ și prin

adunarea celor trei relații se obține $s_3 - 3s_2 + s_1 + 3 = 0$. Atunci $s_3 = 3s_2 - s_1 - 3$.

Din relațiile lui Viete

$$s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 3, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$$

și

$$s_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 7.$$

Rezultă $s_3 = 3s_2 - s_1 - 3 = 15$.

Răspunsul corect este **a**).

26. Relațiile lui Viete:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = m^2 + 1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = m^2 \\ x_1x_2x_3 = 2 \end{cases}$$
. Atunci

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \frac{x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2}{x_1^2x_2^2x_3^2} = \frac{(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)}{x_1^2x_2^2x_3^2}$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \frac{m^4 - 4(m^2 + 1)}{4}$$

Rezultă ecuația $\frac{m^4 - 4(m^2 + 1)}{4} = -1$, sau $m^4 - 4m^2 = 0$, cu soluțiile $m = 0, m = -2, m = 2$.

Răspunsul corect este **b**).

27. Cum $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$, sunt rădăcinile polinomului

$$f = X^3 - aX^2 + 2X + a - 1, \text{ scriem relațiile lui Viete: } \begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = a \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2 \\ s_3 = x_1x_2x_3 = 1 - a \end{cases}$$

Atunci relația $|(2x_1 - 3x_1^2)(2x_2 - 3x_2^2)(2x_3 - 3x_3^2) = 1 - a$ devine

$$|(2x_1 - 3x_1^2)(2x_2 - 3x_2^2)(2x_3 - 3x_3^2) = x_1x_2x_3|(2 - 3x_1)(2 - 3x_2)(2 - 3x_3) =$$

$$(1 - a)(8 - 12s_1 + 18s_2 - 27s_3) = (1 - a)[8 - 12a + 36 - 27(1 - a)] \Rightarrow$$

$$(1 - a)(17 + 15a) = 2(1 - a) \Rightarrow$$

$$(1 - a)(15 + 15a) = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ sau } a = -1.$$

Răspunsul corect este **c**).

28. Scriem relațiile lui Viete:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1. \\ x_1x_2x_3 = 1 \end{cases}$$

Atunci:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{-1}{1} = -1 \\ y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} = 2 \\ y_1y_2y_3 = \frac{1}{x_1x_2x_3} = 1 \end{cases}$$

Polinomul ce are rădăcinile $y_1 = \frac{1}{x_1}, y_2 = \frac{1}{x_2}, y_3 = \frac{1}{x_3}$ va fi

$$Q(X) = X^3 + X^2 + 2X - 1.$$

Răspunsul corect este **b**).

29. Notăm $S_1 = x_1 + x_2$, $P_1 = x_1x_2$, $S_2 = x_3 + x_4$, $P_2 = x_3x_4$. În noile notații, relațiile lui Viete:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = m + 1 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -2m \\ x_1x_2x_3x_4 = -4 \end{cases}$$

devin

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = 2 \\ S_1 S_2 + P_1 + P_2 = m + 1 \\ S_1 P_2 + S_2 P_1 = -2m \\ P_1 P_2 = -4 \end{cases}.$$

Relația $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ devine $S_1 = S_2$ și cum $S_1 + S_2 = 2$, rezultă $S_1 = S_2 = 1$. Atunci, $P_1 + P_2 = m$ și $P_1 + P_2 = -2m$, de unde $-2m = m \Rightarrow m = 0$. Avem mai departe $P_1 + P_2 = 0$, $P_2 = -P_1$ și $P_1 P_2 = -4$, deci $P_1 = 2, P_2 = -2$.

Răspunsul corect este c).

30. Deoarece f se divide cu $g = (x-1)^2$ atunci $x=1$ este rădăcină dublă și pentru f , adică

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow f' = 3X^2 + 2aX + b - 2$$

$$\begin{cases} 1 + a + b - 2 + 2a - 1 = 0 \\ 3 + 2a + b - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = -7 \Rightarrow S = a^2 - b = 16$$

Răspunsul corect este b).

31. Se impune condiția ca restul împărțirii polinomului $X^4 + aX^3 + 2X^2 + bX + c$ la $(X-1)^2(X+1)$ să fie zero. După efectuarea împărțirii, se găsește câtul $X + a + 1$ și restul $(a+4)X^2 + (a+b)X + c - a - 1$. Atunci, $a = -4$, $a + b = 0$, $b = 4$, $c - a - 1 = 0$, $c = -3$. Rezultă, $a^2 + b^2 + c^2 = 41$.

Răspunsul corect este b).

32. Din teorema de împărțire cu rest, avem relația

$$P(X) = (X^2 + X - 2)Q(X) + R(X).$$

$$\text{Atunci, } P(1) = R(1) = n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Răspunsul corect este b).

33. Cum polinomul $P(X)$ are coeficienți reali și $x_1 = 1 - i$ este rădăcină a sa, atunci $P(X)$ admite ca rădăcină și conjugata ei, respectiv pe $x_2 = 1 + i$.

Conform teoremei Bezout $P(X)$, se divide prin $X - x_1$ și $X - x_2$, deci și prin produsul $(X - x_1)(X - x_2) = (X - 1 - i)(X - 1 + i) = X^2 - 2X + 2$. Atunci, restul împărțirii lui $P(X)$ la $X^2 - 2X + 2$ este zero. Efectuând împărțirea, se obține restul $(a - 2)X + b + 4$, care egalat cu polinomul zero generează $a = 2, b = -4$, deci $S = a + b = -2$.

Răspunsul corect este d).

34. Cum polinomul $P(X)$ are coeficienți raționali și $x_1 = -1 - \sqrt{3}$ este o rădăcină a sa, atunci $P(X)$ admite ca rădăcină și conjugata ei, respectiv pe $x_2 = -1 + \sqrt{3}$.

Conform teoremei Bezout $P(X)$ se divide prin $X - x_1$ și $X - x_2$, deci și prin produsul $(X - x_1)(X - x_2) = (X + 1 + \sqrt{3})(X + 1 - \sqrt{3}) = X^2 + 2X - 2$. Atunci, restul împărțirii lui $P(X)$ la $X^2 + 2X - 2$ este zero. Efectuând împărțirea se obține restul $(b - 2a - 10)X + 2a + 9$, care egalat cu polinomul zero generează $a = -\frac{9}{2}, b = 1$, deci $4a^2 - 81b^2 = 0$.

Răspunsul corect este c).

35. Polinomul $P(X) = 6X^5 - 13X^4 + 13X^3 - 6X^2 - X + 1$ are coeficienți întregi, prin urmare eventualele rădăcini raționale se găsesc în mulțimea $\left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}\right\}$.

Printr-o verificare imediată se găsește $P(1) = P\left(-\frac{1}{3}\right) = P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, deci polinomul $P(X)$ se divide prin produsul $(3X + 1)(X - 1)(2X - 1)$. După efectuarea împărțirii lui $P(X)$ la $(3X + 1)(X - 1)(2X - 1)$ se găsește descompunerea în factori ireductibili (în inelul de polinoame $\mathbb{R}[X]$) $P(X) = (3X + 1)(X - 1)(2X - 1)(X^2 - X + 1)$. Așadar, polinomul are două rădăcini complexe și nereale și trei rădăcini raționale.

Răspunsul corect este c).

36. Fie $Q(X) = P(X + 1)$. Restul împărțirii lui $Q(X)$ la $X - 1$ este $Q(1) = P(2) = 2a - 1$. Atunci $2a - 1 = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$.

Răspunsul corect este b).

37. Cum polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ atunci odată cu rădăcina complexă $x_1 = i$ va admite și rădăcina complex conjugată $x_2 = \overline{x_1} = -i$. Prin urmare f se divide prin produsul $(X - x_1)(X - x_2) = X^2 + 1$. Efectuând împărțirea lui f prin $X^2 + 1$ avem $f = (X^2 + 1)(2X^2 - mX - 2) + X(2 - n + m)$ și se impune condiția ca restul să fie polinomul nul. Deci $X(2 - n + m) = 0 \Rightarrow 2 - n + m = 0$.

Din $f' = 8X^3 - 3mX^2 + 2 - n$ și $f'(1) = 2 \Rightarrow -3m - n = -8$.

$$\text{Rezolvând sistemul } \begin{cases} m - n = -2 \\ -3m - n = -8 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{3}{2}; n = \frac{7}{2}.$$

Răspunsul corect este a).

38. Scriem teorema de împărțire cu rest $P(X) = C(X)(X+1)^2 + aX + b$. Atunci $P(-1) = -a + b$, dar în același timp $P(-1) = 5$, deci se obține primă relație $-a + b = 5$. Acum, derivând în raport cu X , obținem $P'(X) = C'(X)(X+1)^2 + 2C(X)(X+1) + a$ și $P'(X) = 2017X^{2016} - 2$. Dăm lui X valoarea -1 și obținem $a = 2015$, iar $b = 2020$. Rezultă că restul este $2015X + 2020$.

Răspunsul corect este b).

39. Pentru $m = \overline{0}$, polinomul devine $P(X) = \overline{2}X^3 + X + \overline{1}$, care nu are rădăcini în inelul $\mathbb{Z}_3$, deoarece $P(\overline{0}) = \overline{1}, P(\overline{1}) = \overline{1}, P(\overline{2}) = \overline{1}$, deci este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$. Pentru $m = \overline{1}$, polinomul devine $P(X) = \overline{2}X^3 + \overline{1}$, care are rădăcina $x_1 = \overline{1}$, deoarece $P(\overline{1}) = \overline{0}$, deci $X - \overline{1}$ divide $P(X)$. Prin urmare $P(X)$ este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$. Pentru $m = \overline{2}$, polinomul devine $P(X) = \overline{2}X^3 + \overline{2}X + \overline{1}$, care are rădăcina $x_1 = \overline{2}$, deoarece $P(\overline{2}) = \overline{0}$, deci $X - \overline{2}$ divide $P(X)$. Prin urmare $P(X)$ este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

Răspunsul corect este a).

40. Întrucât polinomul $X^2 + X + 1$ are numai rădăcini simple complexe și nereale, condiția de divizibilitate se poate scrie astfel: rădăcinile polinomului $X^2 + X + 1$ sunt și rădăcini ale polinomului $P(X)$. Fie ε o rădăcină oarecare a polinomului $X^2 + X + 1$, atunci $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, $\varepsilon^3 = 1$ (rădăcină de ordin 3 a unității).

Avem:

$$P(\varepsilon) = (\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1)^{3n+1} + \varepsilon^2 + m + 1 = \varepsilon^{3n} \varepsilon + \varepsilon^2 + m + 1 = \varepsilon + \varepsilon^2 + m + 1 = m.$$

Deci, $m = 0$.

Răspunsul corect este b).

41. Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la un polinom de gradul doi are gradul cel mult 1. Aplicând teorema de împărțire cu rest, avem relația

$$P(X) = (X - a)(X - b)C(X) + mX + n.$$

În această relație dăm, pe rând, valorile a și b lui X , obținând sistemul liniar în necunoscutele a și b

$$\begin{cases} ma + n = P(a) \\ mb + n = P(b) \end{cases}$$

cu soluțiile

$$\begin{cases} m = \frac{P(b) - P(a)}{b - a} \\ n = \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a} \end{cases}$$

Prin urmare restul va fi $\frac{P(b) - P(a)}{b - a}X + \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a}$.

Răspunsul corect este d).

42. Ecuația este o ecuație reciprocă de ordin 4, care prin împărțire prin x^2 devine $x^2 - 7x + 14 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$. Mai departe, se face notația $y = x + \frac{1}{x}$ și atunci

$y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Ecuația asociată în variabila y va fi

$y^2 - 7y + 12 = 0$, cu soluțiile $y_1 = 3$, $y_2 = 4$. Atunci $x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

are soluțiile $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ și ecuația $x + \frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$ are soluțiile $2 \pm \sqrt{3}$.

Ordonând crescător cele patru soluții, găsim

$$x_1 = 2 - \sqrt{3}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, x_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, x_4 = 2 + \sqrt{3}.$$

Rezultă $x_4 - x_1 + x_3 - x_2 = 2\sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Răspunsul corect este c).

43. Ecuația este bipătrată și prin notația $x^2 = y$ se obține ecuația de gradul al doilea $y^2 - (m+1)y + m = 0$, cu soluțiile $y_1 = 1$ și $y_2 = m$. Atunci, pentru $x^2 = 1$, se obține $x_1 = 1, x_2 = -1$, iar ecuația $x^2 = m$ are soluții reale pentru $m \geq 0$.

Răspunsul corect este d).

44. Ecuația se scrie sub forma echivalentă $x^4 - 2x^3 + (1-\alpha)x^2 - 2x + 1 = 0$, care este o ecuație reciprocă de grad 4. Se împarte ecuația cu x^2 și se obține $x^2 - 2x + 1 - \alpha - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$. Se notează $x + \frac{1}{x} = y$ și, atunci, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, obținându-se ecuația în y , $y^2 - 2y - \alpha - 1 = 0$. Ecuația de gradul 4 în x are două rădăcini duble dacă și numai dacă ecuația în y are o rădăcină dublă, prin urmare discriminantul ecuației trebuie să fie 0. Așadar, $\Delta = 4 + 4\alpha + 4 = 0$, deci $\alpha = -2$.

Răspunsul corect este a).

45. Se efectuează împărțirea lui $P(X) = X^3 + mX^2 + nX - 6$ la $Q(X) = X^2 - X - m$ și se pune condiția ca restul obținut să fie polinomul nul. Atunci restul $(2m+n+1)X + m^2 + m - 6 = 0$ implică $2m+n+1=0$, $m^2 + m - 6 = 0$, cu soluțiile $(m,n) = (2,-5)$ și $(m,n) = (-3,5)$. Avem $y = 2^2 + (-5)^2 + (-3)^2 + 5^2 = 63$.

Răspunsul corect este a).

46. Restul împărțirii polinomului $P(X) = (1 + X + X^2)^{1006}$ la polinomul $X(X^2 - 1)$ este un polinom de grad cel mult doi și teorema de împărțire cu rest se poate scrie sub forma

$$P(X) = (1 + X + X^2)^{1006} = C(X)X(X-1)^2 + aX^2 + bX + c,$$

unde a, b, c sunt trei numere reale. Dăm pe rând valorile 0, -1, 1 și vom găsi sistemul următor în a, b, c :

$$\begin{cases} c = 1 \\ a - b + c = 1 \\ a + b + c = 3^{1006} \end{cases},$$

ce are soluția $a = b = \frac{3^{1006} - 1}{2}$, $c = 1$. Restul împărțirii este $\frac{3^{1006} - 1}{2}X^2 + \frac{3^{1006} - 1}{2}X + 1$.

Răspunsul corect este a).

47. Prin împărțirea polinomului $P(X)$ prin $Q(X)$ se obține câtul $C(X)$ și restul $R(X)$ de grad maxim 1. Efectuând împărțirea avem

$$P(X) = Q(X) \cdot C(X) + R(X), \text{grad} R(X) < 2 \Rightarrow R(X) = aX + b.$$

Deoarece $Q(X) = X^2 - 2X - 3 = (X - 3)(X + 1)$ impunem condițiile:

$$\begin{cases} P(-1) = 2 \cdot 4^n - 3 = -a + b \\ P(3) = 6 \cdot 4^n - 3 = 3a + b \end{cases} \Rightarrow a = 4^n; b = 3(4^n - 1)$$

Răspunsul corect este a).

48. Prin împărțirea polinomului

$$P(X) = \hat{2}X^4 + \hat{3}X^3 + X^2 + \hat{2}X + \hat{4} \in \mathbb{Z}_5[X]$$

la polinomul $X^2 + \hat{2}X + \hat{3}$, ținând cont că avem coeficienți în corpul claselor de resturi modulo 5, vom obține câtul $\hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{2}$ și restul $\hat{2}X$.

Răspunsul corect este c).

49. Conform teoremei lui Bezout polinomul

$$P(X) = X^4 + \hat{2}X^3 + aX^2 + (a + \hat{1})X + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X] \text{ se divide prin } X + \hat{2} \text{ dacă}$$

$$P(-\hat{2}) = \hat{0}. \text{ Însă, în corpul } \mathbb{Z}_3 \text{ avem } -\hat{2} = \hat{1} \text{ de unde rezultă condiția } P(\hat{1}) = \hat{0}.$$

$$P(\hat{1}) = \underbrace{\hat{1} + \hat{2}}_{\hat{3}=\hat{0}} + a + a + \underbrace{\hat{1} + \hat{2}}_{\hat{3}=\hat{0}} = \hat{2}a = \hat{0}, \text{ deci } a = \hat{0} \text{ și mulțimea } M = \{\hat{0}\}.$$

Răspunsul corect este d).

50. Polinomul $P(X) = \hat{3}X^4 + \hat{2}X^3 + aX^2 + \hat{4}X + b \in \mathbb{Z}_5[X]$ se divide prin

$$X^2 + \hat{3}X = X(X + \hat{3}) \text{ dacă el se divide prin simultan } X \text{ și prin } X + \hat{3}. \text{ Conform}$$

teoremei lui Bezout trebuie ca $P(\hat{0}) = P(-\hat{3}) = \hat{0}$. În corpul $\mathbb{Z}_5$, $-\hat{3} = \hat{2}$ deci avem

$$\text{condițiile } P(\hat{0}) = P(\hat{2}) = \hat{0}.$$

Rezultă $P(\hat{0}) = b = \hat{0}$, $P(\hat{0}) = \hat{4} + \hat{4}a + b = \hat{0}$ de unde $b = \hat{0}$, $a = -\hat{1} = \hat{4}$,

$$M = \left\{ \left(\hat{4}, \hat{0} \right) \right\}, \quad S = \hat{4} + \hat{0} = \hat{4}$$

Răspunsul corect este b).

ENUNȚURI
ANALIZĂ MATEMATICĂ
Limite. Continuitate

1. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n}{4^n + 7^n}$ este:
a) $\ell = 0$; **b)** $\ell = \frac{5}{7}$; **c)** $\ell = \frac{3}{4}$; **d)** $\ell = \infty$.
2. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^n)}{n}$ este:
a) $\ell = 0$; **b)** $\ell = 1$; **c)** $\ell = e$; **d)** $\ell = \infty$.
3. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{3n})}{\ln(1 + e^n)}$ este:
a) $\ell = 0$; **b)** $\ell = 1$; **c)** $\ell = 3$; **d)** $\ell = \infty$.
4. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} \cdot \sin \frac{1}{n}$ este:
a) $\ell = 0$; **b)** $\ell = 1$; **c)** $\ell = -1$; **d)** $\ell = \infty$.
5. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{3n}{3n+2} \right)$ este:
a) $\ell = 0$; **b)** $\ell = \infty$; **c)** $\ell = \ln e$; **d)** $\ell = -\frac{2}{3}$.
6. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - e^{\frac{1}{n}} \right)^n$ este:
a) $\ell = \frac{1}{e}$; **b)** $\ell = \infty$; **c)** $\ell = \ln e$; **d)** $\ell = e$.
7. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{1}{n} \right)^n$ este:
a) $\ell = \frac{1}{e}$; **b)** $\ell = \infty$; **c)** $\ell = 0$; **d)** $\ell = e$.

8. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n} \right)$ este:

a) $\ell = \frac{1}{e}$; b) $\ell = \infty$; c) $\ell = 1$; d) $\ell = 0$.

9. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{\frac{3^{3n} (n!)^3}{(3n)!}}$ este:

a) $\ell = 1$; b) $\ell = \infty$; c) $\ell = 3$; d) $\ell = 0$.

10. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ este:

a) $\ell = \frac{1}{e}$; b) $\ell = \infty$; c) $\ell = e$; d) $\ell = 0$.

11. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \right)$ este:

a) $\ell = \frac{2}{3}$; b) $\ell = \frac{1}{3}$; c) $\ell = 0$; d) $\ell = +\infty$.

12. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \right)$ este:

a) $\ell = \infty$; b) $\ell = 0$; c) $\ell = \frac{1}{\sqrt{2}}$; d) $\ell = 1$.

13. Valoarea limitei

$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{1}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n \sqrt{n+1} + (n+1) \sqrt{n}} \right)$ este:

a) $\ell = 0$; b) $\ell = 1$; c) $\ell = \frac{1}{\sqrt{2}}$; d) $\ell = \infty$.

14. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$ este:

a) $\ell = 0$; b) $\ell = \ln 2$; c) $\ell = -\ln 2$; d) $\ell = \infty$.

15. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{3} \right)^n$; $a, b, c > 0$ este:

- a) $\ell = \sqrt[3]{a+b+c}$; b) $\ell = \ln(a \cdot b \cdot c)$; c) $\ell = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$;
d) $\ell = \ln(a+b+c)$;

16. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{2 \cdot 6}{5^2} \cdot \frac{3 \cdot 7}{6^2} \cdot \dots \cdot \frac{n(n+4)}{(n+3)^2} \right]$ este:

- a) $\ell = 1$; b) $\ell = +\infty$; c) $\ell = 0$; d) $\ell = \frac{1}{e}$.

17. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ este:

- a) $\ell = e$; b) $\ell = +\infty$; c) $\ell = 1$; d) $\ell = 0$.

18. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^3 + n - 1) \cdot \sin \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}$ este:

- a) $\ell = e$; b) $\ell = +\infty$; c) $\ell = 0$; d) $\ell = 3$;

19. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n+1}} \right)$ este:

- a) $\ell = \ln 3$; b) $\ell = +\infty$; c) $\ell = 1$; d) $\ell = \frac{1}{e}$.

20. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3})$ este:

- a) $\ell = 1$; b) $\ell = +\infty$; c) $\ell = 0$; d) $\ell = 2$.

21. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{n^3 + n} - \sqrt{n^2 + 1} \right)$ este:

- a) $\ell = \frac{1}{3}$; b) $\ell = -\frac{1}{2}$; c) $\ell = 1$; d) $\ell = -\frac{1}{6}$.

22. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}}$ este:

a) $\ell = 1$; b) $\ell = +\infty$; c) $\ell = \frac{1}{2}$; d) $\ell = \frac{1}{e}$.

23. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k(k+1)}{3n(n+1)(n+2)}$ este:

a) $\ell = \infty$; b) $\ell = \frac{1}{3}$; c) $\ell = \frac{1}{9}$; d) $\ell = 0$.

24. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \ln 2n}{1 + \ln 3n}$ este:

a) $\ell = 1$; b) $\ell = \frac{1}{e}$; c) $\ell = \infty$; d) $\ell = \frac{2}{3}$.

25. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n) \cdot \frac{1}{e^n + 1}$ este:

a) $\ell = \frac{3}{2}$; b) $\ell = e$; c) $\ell = 1$; d) $\ell = \infty$;

26. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{2n}{2n+3} \right)$ este:

a) $\ell = \frac{3}{2}$; b) $\ell = +\infty$; c) $\ell = -\frac{3}{2}$; d) $\ell = \frac{1}{e}$.

27. Valoarea limitei $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{\frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (2n)}{n^n}}$ este:

a) $\ell = 1$; b) $\ell = +\infty$; c) $\ell = \frac{4}{e}$; d) $\ell = \frac{1}{e}$.

28. Fie funcția $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3x + 1, & x \in [-1, 0) \\ x^2 + bx - c, & x \in [0, 1] \end{cases}$, pentru

care există $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} < +\infty$ și care verifică $f(-1) = f(1)$. Atunci,

valorile parametrilor $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care f este continuă pe $[-1, 1]$ sunt:

a) $a = -5, b = -3, c = -1$; b) $a = -1, b = -3, c = -5$ c) $a = 1, b = 3, c = 5$;
d) $a = -1, b = -3, c = 5$.

29. Mulțimea de continuitate a funcției $f : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{6}, & x = 0 \end{cases} \quad \text{este:}$$

a) $[-1, \infty)$; **b)** $[-1, \infty) - \{0\}$; **c)** $[0, \infty)$; **d)** $[-1, 0)$.

30. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - x + \arctg x$, atunci

valoarea limitei $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} \int_0^x f(t) dt$ este:

a) $l = 0$; **b)** $l = \frac{1}{12}$; **c)** $l = \infty$; **d)** $l = \frac{1}{2}$.

31. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$, atunci pentru $(\forall) \alpha \in \mathbb{R}$, valoarea limitei $l = \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x)$ este:

a) $l = 0$; **b)** $l = \infty$; **c)** $l = 1$; **d)** $l = \pi$.

32. Valoarea limitei $l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$ este:

a) $l = 1$; **b)** $l = \infty$; **c)** $l = 0$; **d)** $l = 2$.

33. Valoarea limitei $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$ este:

a) $l = 4$; **b)** $l = 0$; **c)** $l = 1$; **d)** $l = \frac{1}{4}$.

34. Valoarea limitei $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln(\cos x)$ este:

a) $l = 0$; **b)** $l = -\frac{1}{2}$; **c)** $l = 1$; **d)** $l = 2$.

35. Valoarea limitei $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{\sin x} + b^{\operatorname{tg} x}}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$, $a, b > 0$ este:

a) $l = \sqrt{ab}$; **b)** $l = \ln(a \cdot b)$; **c)** $l = 1$; **d)** $l = \ln(a + b)$.

36. Valoarea parametrului real a pentru care funcția $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} a \ln(3-x), & \text{dacă } x < 1 \\ \frac{2^x - 2}{x-1}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$
 are limită în punctul $x=1$ este:
a) $a = \ln 3$; **b)** $a = 1$; **c)** $a = \ln 2$; **d)** $a = 2$.

37. Asimptotele funcției $f : \mathbb{R} - \{-2, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ sunt:

- a)** dreptele $x = -2$, $x = 2$ sunt asimptote verticale, funcția nu are asimptote orizontale, $y = x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ și spre $+\infty$;
b) dreptele $x = -2$, $x = 2$ sunt asimptote verticale, dreapta $y = 2$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$, $y = x + 1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ și $+\infty$;
c) dreptele $x = 2$, $x = -2$ sunt asimptote verticale, dreapta $y = 2$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$, funcția nu are asimptote oblice;
d) dreptele $x = -4$, $x = 4$ sunt asimptote verticale, funcția nu are asimptote orizontale, $y = x + 1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ și spre $+\infty$.

38. Valoarea limitei $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)^3$ este:

- a)** $l = \frac{1}{8}$; **b)** $l = 0$; **c)** $l = 1$; **d)** $l = 2$.

39. Valorile parametrilor reali a și b pentru care

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + ax + b \right) = 2$$

sunt:

- a)** $a = -1$, $b = 2$; **b)** $a = 1$, $b = -2$; **c)** $a = -1$, $b = 0$;
d) $a = 0$, $b = 2$;

40. Valoarea limitei $l = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ este:

- a)** $l = \infty$; **b)** $l = 0$; **c)** $l = 1$; **d)** $l = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$41. \text{ Fie } f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{3x}, x \in [0, 1] \\ \frac{a \cdot \sin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}, x \in (1, \pi] \end{cases}.$$

Valoarea parametrului a pentru care funcția f este continuă pe $[0, \pi]$, este:

$$\text{a) } a=1; \text{ b) } a=e^3; \text{ c) } a=\frac{1}{3}; \text{ d) } a=-3e^3.$$

$$42. \text{ Fie funcția } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} b + e^{a|x|+1}, x > -1 \\ (a-e)x + b, x \leq -1 \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}.$$

Dacă $A = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid f \text{ continuă pe } \mathbb{R} \text{ și } a^2 + b^2 \leq 4\}$ iar c este numărul elementelor mulțimii A , atunci:

$$\text{a) } c=1; \text{ b) } c=4; \text{ c) } c=3; \text{ d) } c=5.$$

$$43. \text{ Mulțimea valorilor parametrului real } m \text{ pentru care funcția } f(x) = \begin{cases} e^x + |x| - m, x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x}, x > 0 \end{cases} \text{ este continuă pe } \mathbb{R} \text{ este:}$$

$$\text{a) } \{0\} \text{ b) } \{-1\}; \text{ c) } \emptyset; \text{ d) } [1, 2).$$

$$44. \text{ Fie funcția } f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 x^2 n^{\ln x} + x}{x^2 n^{\ln x} + 1}, a \in \mathbb{R}. \text{ Dacă } A = \{a \in \mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\} \text{ și } B = \sum_{a \in A} |a|, \text{ atunci:}$$

$$\text{a) } B=7; \text{ b) } B=\{1\}; \text{ c) } B=3; \text{ d) } B=2.$$

$$45. \text{ Fie funcția } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} \cdot \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ a, x = 0 \end{cases}. \text{ Valoarea lui } a$$

pentru ca funcția să fie continuă în $x=0$ este:

$$\text{a) } a=1; \text{ b) } a=0; \text{ c) } a=2; \text{ d) } a=-2.$$

46. Valoarea parametrului $m \in [0,1]$ astfel ca funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - x^2 + 5}{x^{2n} + x^2 + 3}, & |x| < 1 \\ 2\sqrt{x^2 - m}, & |x| \geq 1 \end{cases}$$
 să fie continuă pe $\mathbb{R}$ este:
a) $m = \frac{1}{4}$; **b)** $m = \frac{3}{4}$; **c)** $m = \frac{1}{3}$; **d)** $m = \frac{1}{2}$.

47. Valoarea lui $m + n$ pentru care funcția $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}, & x < 0 \\ m, & x = 0 \\ e^x + n, & x > 0 \end{cases}$
 să fie continuă în $x = 0$, este:
a) 0 **b)** 1; **c)** 2; **d)** 3.

48. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuă, cu proprietățile:
 $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$ și $f(0) = \frac{1}{2}$. Dacă $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, atunci:
a) $l = 1$; **b)** $l = 2$; **c)** $l = \frac{1}{2}$; **d)** $l = 0$.

49. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{d^x + e^x + f^x - 3}$, $(\forall) a, b, c, d, e, f > 0$
 Valoarea limitei $l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ este:
a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\ln(a \cdot b \cdot c)}{\ln(d \cdot e \cdot f)}$; **b)** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; **c)** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln \frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e \cdot f}$
d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

50. Dacă numerele a, b, c verifică relația $a + b + c = \pi$, atunci
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(ax^2 + bx + c)}{x^2 - 1}$ este:
a) $-\frac{2a+b}{2}$; **b)** $-\frac{a+2b}{3}$; **c)** $\frac{a+2b}{2}$; **d)** 0.

SOLUȚII
ANALIZĂ MATEMATICĂ
Limite. Continuitate

$$\begin{aligned}
 1. \quad \text{Avem } \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n}{4^n + 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left[\left(\frac{3}{5} \right)^n + 1 \right]}{7^n \left[\left(\frac{4}{7} \right)^n + 1 \right]} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{7} \right)^n \frac{\left(\frac{3}{5} \right)^n + 1}{\left(\frac{4}{7} \right)^n + 1} = 0
 \end{aligned}$$

Răspunsul corect este a).

$$\begin{aligned}
 2. \quad \text{Avem } \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left[e^n \left(1 + \frac{1}{e^n} \right) \right]}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln e^n + \ln \left(1 + \frac{1}{e^n} \right)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \ln \left(1 + \frac{1}{e^n} \right)}{n} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left[1 + \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{e^n} \right) \right]}{n} = 1
 \end{aligned}$$

Răspunsul corect este b).

$$\begin{aligned}
3. \quad \text{Avem } \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^{3n})}{\ln(1+e^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln e^{3n} \left(1 + \frac{1}{e^{3n}}\right)}{\ln e^n \left(1 + \frac{1}{e^n}\right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln e^{3n} + \ln\left(1 + \frac{1}{e^{3n}}\right)}{\ln e^n + \ln\left(1 + \frac{1}{e^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \ln\left(1 + \frac{1}{e^{3n}}\right)}{n + \ln\left(1 + \frac{1}{e^n}\right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left[3 + \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{e^{3n}}\right) \right]}{n \left[1 + \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{e^n}\right) \right]} = 3
\end{aligned}$$

Răspunsul corect este **c**).

$$4. \quad \text{Avem } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} \cdot \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

Răspunsul corect este **b**).

$$\begin{aligned}
5. \quad \text{Avem } l &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{3n}{3n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3n}{3n+2} \right)^n \\
&= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{3n+2} \right)^n = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-2}{3n+2} \right)^{\frac{3n+2}{-2}} \right]^{\frac{-2n}{3n+2}} = \ln e^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Răspunsul corect este **d**).

$$\begin{aligned}
6. \quad \text{Avem } \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - e^{\frac{1}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 - e^{\frac{1}{n}} \right)^n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 - e^{\frac{1}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + 1 - e^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{1-e^{\frac{1}{n}}}} \right]^{-\frac{\frac{1}{n}-1}{1-e^{\frac{1}{n}}}} = e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n}}} = e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}} = e^{-\ln e} = e^{-1} = \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

Răspunsul corect este **a**).

7. Avem

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sin \frac{1}{n}}} \right]^{\sin \frac{1}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} = e$$

Răspunsul corect este **d**).

8. Fie $x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n}$, $y_n = n$.

$$\text{Conform Cesaro-Stolz, valoarea limitei, } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln(n+1)}}{1} = 0$$

Răspunsul corect este **d**).

9. Fie $x_n = \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}$. Aplicând Criteriul lui Cauchy-D'Alembert,

avem:

$$\begin{aligned} \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{3n+3} \cdot [(n+1)!]^3}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{3^{3n} \cdot (n!)^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = 1. \end{aligned}$$

Răspunsul corect este **a**).

10. Fie $x_n = \frac{n!}{n^n}$. Aplicând Criteriul lui Cauchy-D'Alembert, avem:

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e}.$$

Răspunsul corect este **a**).

$$11. \text{ Avem } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \right)$$

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left[\left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{3n-2} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n+1} \right) \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{3n+1-1}{3n+1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Răspunsul corect este **b**).

$$\begin{aligned} 12. \text{ Avem } \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1}-1) = \infty. \end{aligned}$$

Răspunsul corect este **a**).

13. Avem

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{1}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n \sqrt{n+1} + (n+1) \sqrt{n}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot \sqrt{k+1} + (k+1) \cdot \sqrt{k}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{k \cdot \sqrt{k+1} - (k+1) \cdot \sqrt{k}}{-k^2 - k} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1. \end{aligned}$$

Răspunsul corect este **b**).

14. Avem

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n [\ln(k+1) - \ln k - \ln k + \ln(k-1)] = -\ln 2.$$

Răspunsul corect este **c**).

$$\begin{aligned} 15. \text{ Avem } \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}} - 3}{3} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}} - 3}{3} \right)^{\frac{3}{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}} - 3}} \right]^{n \frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}} - 3}{3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1 + b^{\frac{1}{n}} - 1 + c^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right)} = \\ &= e^{\frac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c)} = e^{\frac{1}{3} \ln(a \cdot b \cdot c)} = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}. \end{aligned}$$

Răspunsul corect este **c**).

$$\begin{aligned} 16. \text{ Valoarea limitei } \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{2 \cdot 6}{5^2} \cdot \frac{3 \cdot 7}{6^2} \cdot \dots \cdot \frac{n(n+4)}{(n+3)^2} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) [5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (n+4)]}{[4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n+3)] [4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n+3)]} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! (n+4)! 3! 3!}{4! (n+3)! (n+3)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+4)}{2(n+1)(n+2)(n+3)} = 0. \end{aligned}$$

Răspunsul corect este **c**).

17. Fie $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ și $y_n = n$. Conform Cesaro-Stolz,

$$\text{valoarea limitei } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0.$$

Răspunsul corect este **d**).

$$\begin{aligned}
 18. \quad \text{Avem } \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^3 + n - 1) \cdot \sin \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n^2} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{3n^3 + n - 1}{n^3} = 3.
 \end{aligned}$$

Răspunsul corect este **d**).

$$\begin{aligned}
 19. \quad \text{Avem } \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(3^{\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot 3^{\frac{1}{n+1}} \left(3^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} - 1 \right) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot 3^{\frac{1}{n+1}} \left(3^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1 \right) = \ln 3 \cdot 1 \cdot 3^0 = \ln 3.
 \end{aligned}$$

Răspunsul corect este **a**).

$$\begin{aligned}
 20. \quad \text{Avem } \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Răspunsul corect este **c**).

$$\begin{aligned}
 21. \quad \text{Avem } \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{n^3 + n} - \sqrt{n^2 + 1} \right) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{n^3 + n} - n + n - \sqrt{n^2 + 1} \right) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 \left[\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} + 1 \right]} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right)} = -\frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Răspunsul corect este **d**).

$$\begin{aligned}
 22. \quad \text{Avem } \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2-n-1)(\sqrt{n+4} + \sqrt{n+3})}{(n+4-n-3)(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left(\sqrt{1+\frac{4}{n}} + \sqrt{1+\frac{3}{n}} \right)}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}} \right)} = 1.
 \end{aligned}$$

Răspunsul corect este **a**).

$$23. \quad \text{Avem } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{18n(n+1)(n+2)} + \frac{n(n+1)}{6n(n+1)(n+2)} \right] = \frac{1}{9}.$$

Răspunsul corect este **c**).

$$24. \quad \text{Avem } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \ln 2 + \ln n}{1 + \ln 3 + \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n \left(\frac{1}{\ln n} + \frac{\ln 2}{\ln n} + 1 \right)}{\ln n \left(\frac{1}{\ln n} + \frac{\ln 3}{\ln n} + 1 \right)} = 1.$$

Răspunsul corect este **a**).

$$25. \quad \text{Avem } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{e} \right)^n \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1}{1 + \left(\frac{1}{e} \right)^n} = \infty \cdot 1 = \infty.$$

Răspunsul corect este **d**).

$$26. \quad \text{Avem } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2n}{2n+3} \right)^n = \ln e^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}.$$

Răspunsul corect este **c**).

27. Aplicând Criteriul lui Cauchy-D'Alembert, avem:

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{4}{e}.$$

Răspunsul corect este **c**).

28. Se impune că f să fie continuă în $x=0$. Avem $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} f(x) = f(0)$ dacă și numai dacă $1 = -c$, adică $c = -1$. Din $f(-1) = f(1)$ rezultă $a + 4 = 2 + b$, adică $b = a + 2$.

Limita există dacă $\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{ax^2 - 3x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x^2 + bx - c - 1}{x} \Leftrightarrow -3 = b.$$

Astfel $a = -5$.

Așadar, valorile determinate sunt: $a = -5$, $b = -3$, $c = -1$.

Răspunsul corect este a).

$$29. \text{ Din } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} - \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{2} \text{ și}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1)} = \frac{1}{3}, \text{ se deduce}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \text{ Cum } f(0) = \frac{1}{6}, \text{ rezultă că } f \text{ este continuă pe } [-1, \infty).$$

Răspunsul corect este a).

$$30. \int_0^x f(t) dt = \frac{t^4}{12} \Big|_0^x - \frac{t^2}{2} \Big|_0^x + t \operatorname{arctg} t \Big|_0^x - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \Big|_0^x =$$

$$= \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

$$\text{Dar } \frac{1}{x^3} \int_0^x f(t) dt = \frac{x}{12} - \frac{1}{2x} + \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} - \frac{1}{2} \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}.$$

$$\text{Știm că } \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} = 0.$$

Rezultă că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{12} = \infty$.

Răspunsul corect este **c**).

31. Avem $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \stackrel{e^x=t}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln t - \ln(t+1)]$.

Dacă $\alpha \leq 0$, atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = 0$.

Dacă $\alpha > 0$, atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha [x - \ln(e^x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{-\alpha}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{e^x + 1} \right) = 0$, pentru că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^r}{e^x} = 0, (\forall) r \in \mathbb{R}$.

Răspunsul corect este **a**).

32. Se calculează limita $l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - 1 + 1 - \sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$.

Avem $l = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x-1} + \frac{1 - \sqrt[3]{3x-2}}{x-1} \right)$. Amplificând fiecare fracție cu

conjugatul, obținem $l = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{\sqrt{2x-1} + 1} - \frac{3}{1 + \sqrt[3]{3x-2} + \sqrt[3]{(3x-2)^2}} \right) = 0$.

Răspunsul corect este **c**).

33. Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$, vom folosi limite

fundamentale. Astfel avem $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \sin x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot x}{\frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$.

Răspunsul corect este **d**).

$$\begin{aligned}
 34. \quad \text{Avem } l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln(\cos x) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Răspunsul corect este **b**).

$$\begin{aligned}
 35. \quad \text{Avem } l &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{\sin x} + b^{\operatorname{tg} x}}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^{\sin x} + b^{\operatorname{tg} x}}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{x}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{a^{\sin x} + b^{\operatorname{tg} x} - 2}{2} \right)^{\frac{2}{a^{\sin x} + b^{\operatorname{tg} x} - 2}} \right]^{\frac{a^{\sin x} + b^{\operatorname{tg} x} - 2}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\sin x} + b^{\operatorname{tg} x} - 2}{2x}} = \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\sin x} - 1 + b^{\operatorname{tg} x} - 1}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \sin x + \frac{b^{\operatorname{tg} x} - 1}{\operatorname{tg} x} \cdot \operatorname{tg} x}{2x}} = \\
 &= e^{\frac{\ln a + \ln b}{2}} = e^{\frac{1}{2} \ln(a \cdot b)} = \sqrt{ab}.
 \end{aligned}$$

Răspunsul corect este **a**).

$$\begin{aligned}
 36. \quad \text{Avem } l_s &= f(1-0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} a \ln(3-x) = a \ln 2 \text{ și} \\
 l_d &= f(1+0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2^x - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \frac{2^{1+y} - 2}{y} = 2 \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \frac{2^y - 1}{y} = 2 \ln 2.
 \end{aligned}$$

Cum $l_s = l_d$ se obține $a = 2$.

Răspunsul corect este **d**).

37. Dreptele $x = -2$, $x = 2$ sunt asimptote verticale.

Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, funcția nu are asimptote orizontale.

Studiem existența asimptotei oblice spre $+\infty$.

Calculăm

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2} = 1 \text{ și } n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = 0 . \text{ Așadar, } y = x \text{ este asimptotă oblică spre } +\infty .$$

Similar, se obține că $y = x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

Răspunsul corect este **a**).

$$38. \text{ Avem } l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \right)^3 =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} \right)^3 = \frac{1}{8} .$$

Răspunsul corect este **a**).

39. Trecând la limită pentru $x \rightarrow +\infty$, avem $\infty + a(\infty) + b$.

Dacă $a > 0$, atunci limita ar fi ∞ , ceea ce este fals. Rezultă $a \leq 0$. Dacă $a = 0$, limita este $\infty + b = \infty$, ceea ce nu convine. Rămâne cazul $a < 0$, când avem nedeterminarea $\infty - \infty$. Se amplifică cu expresia conjugată, și astfel

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - (ax + b)^2}{\sqrt{x^2 + 1} - ax - b} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - a^2 x^2 - 2abx - b^2}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - a - \frac{b}{x} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 (1 - a^2) - 2abx + 1 - b^2}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - a - \frac{b}{x} \right)} . \quad (1)$$

Dacă $a^2 - 1 \neq 0$, atunci limita ar fi finită (la numărător x figurează la puterea a doua, în timp ce la numitor doar la puterea întâi).

Deci $a^2 - 1 = 0$ cu soluțiile $a_1 = -1$, $a_2 = 1$. Cum $a < 0$, rezultă $a = -1$. Relația (1)

$$\text{devine } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(2b + \frac{1-b^2}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{b}{x} \right)} = \frac{2b}{2} = b = 2.$$

Deci, $a = -1$, $b = 2$.

Răspunsul corect este a).

$$40. \quad \text{Se utilizează } l = \lim_{x \searrow 0} x \ln x = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Astfel } \ln l &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt{y} \ln \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt{y} \ln (\sqrt{y})^{-2} = \\ &= -2 \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt{y} \ln \sqrt{y} = -2 \lim_{z \rightarrow 0} z \ln z = 0. \text{ Avem } \ln l = 0, \text{ rezultă } l = 1. \end{aligned}$$

Răspunsul corect este c).

$$41. \quad \text{Avem } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = e^3 = f(1) \text{ și } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} a \cdot \frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x-4)} = -\frac{a}{3}.$$

$$\text{Cum } e^3 = -\frac{a}{3}, \text{ se obține } a = -3e^3.$$

Răspunsul corect este d).

$$42. \quad \text{Avem } f(x) = \begin{cases} b + e^{-ax+1}, & x \in (-1, 0) \\ b + e^{ax+1}, & x \in [0, \infty) \\ (a-e)x + b, & x \leq -1 \end{cases} \quad f \text{ este continuă în } -1$$

implică $-a + e + b = b + e^{a+1}$ dacă și numai dacă $e - a = e^{a+1} \Leftrightarrow a = 0$.

Funcția f este continuă în 0, implică $b + e = b + e$.

Din condiția $a^2 + b^2 \leq 4$ rezultă $b \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$.

Rezultă $A = \{(0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (0, 2)\}$.

Deci, $c = 5$.

Răspunsul corect este d).

$$43. \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 1 - m = f(0), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Rezultă $1 - m = 1$, deci $m = 0$.

Răspunsul corect este a).

$$44. \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \\ \frac{a^2+1}{2}, & x=1; \quad f(1-0) = f(1+0) = f(1) \text{ dacă și numai} \\ a^2, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{dacă } 1 = \frac{a^2+1}{2} = a^2 \Leftrightarrow a \in \{-1,1\}, \text{ rezultă } A = \{-1,1\}, \text{ adică } B = 2.$$

Răspunsul corect este d).

$$45. \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{x^2}} \cdot \sin \frac{1}{x} = 0, \text{ rezultă } a = 0.$$

Răspunsul corect este b).

$$46. \quad f(x) = \frac{5-x^2}{x^2+3}, \quad x \in (-1,1), \quad f(1-0) = f(1) = f(1+0) \text{ dacă și numai}$$

$$\text{dacă } 1 = 2\sqrt{1-m}, \text{ adică } 1 = 4 - 4m, \text{ rezultă } m = \frac{3}{4}.$$

Răspunsul corect este b).

$$47. \quad \text{Avem } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = f(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) \text{ dacă și numai dacă}$$

$$\frac{1}{2} = m = 1 + n. \text{ Rezultă că } m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}, \text{ de unde } m + n = 0.$$

Răspunsul corect este a).

$$48. \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + x$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{2}$$

.....

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + \frac{x}{2^n}$$

$$\text{Rezultă } f(x) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + \frac{x\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \text{ dacă și numai dacă}$$

$$f(x) = 2x\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).$$

În baza continuității funcției f , trecând la limită după $n \rightarrow \infty$, rezultă

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2}. \text{ Deci } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 2.$$

Răspunsul corect este **b**).

$$49. \quad f(x) = \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{x} \cdot \frac{x}{d^x + e^x + f^x - 3} =$$

$$= \left(\frac{a^x - 1}{x} + \frac{b^x - 1}{x} + \frac{c^x - 1}{x} \right) \cdot \left(\frac{d^x - 1}{x} + \frac{e^x - 1}{x} + \frac{f^x - 1}{x} \right)^{-1}.$$

$$\text{Atunci, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (\ln a + \ln b + \ln c) \cdot (\ln d + \ln e + \ln f)^{-1} = \frac{\ln(a \cdot b \cdot c)}{\ln(d \cdot e \cdot f)}.$$

Răspunsul corect este **a**).

$$50. \quad \text{Avem } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(ax^2 + bx + c)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(ax^2 + bx + \pi - a - b)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin(ax^2 + bx - a - b)}{ax^2 + bx - a - b} \cdot \frac{a(x^2 - 1) + b(x-1)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(ax + a + b)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{2a + b}{2}.$$

Răspunsul corect este **a**).

ENUNȚURI
ANALIZĂ MATEMATICĂ
Derivabilitate

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{3x}(2x+1)^3$ și $\lambda = f'(0)$.
Atunci λ , valoarea derivatei funcției f în punctul $x=0$, este egală cu:
a) $\lambda = 9$ **b)** $\lambda = 1$ **c)** $\lambda = 3$ **d)** $\lambda = 6$.
2. Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^x - a^x - x^a$, $a > 0$ și $\lambda = f'(a)$.
Atunci λ , valoarea derivatei funcției f în punctul $x=a$, este egală cu:
a) $\lambda = a$ **b)** $\lambda = 0$ **c)** $\lambda = a^a$ **d)** $\lambda = a^a \ln(a)$.
3. Mulțimea M a valorilor parametrului real m pentru care funcția
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 + 4x + m)$ are puncte de extrem este egală cu:
a) $M = \emptyset$ **b)** $M = (-5, 5)$ **c)** $M = (-\infty, 5)$ **d)** $M = (5, \infty)$.
4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + ax + b$ cu $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă graficul
funcției trece prin punctul $P(-1, 3)$, tangenta la graficul funcției în acest punct
este paralelă cu prima bisectoare și $S = a^2 + b^2$ atunci valoarea lui S este egală cu:
a) $S = 62$ **b)** $S = 11$ **c)** $S = 100$ **d)** $S = 61$
5. Fie funcția $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = \frac{x}{e^{2x}}$ și funcțiile $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f_n(x) = f'_{n-1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Să se calculeze $f_2(2)$.
a) $f_2(2) = \frac{4}{e^4}$ **b)** $f_2(2) = 0$ **c)** $f_2(2) = -3e^{-4}$ **d)** $f_2(2) = 2e^{-4}$.
6. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2024 - 2025 \sqrt[2025]{x}$. Atunci ecuația
tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$ este:
a) $y = x - 1$ **b)** $y = 0$ **c)** $y = x$ **d)** $y = 1$.

7. Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} \ln x$. Să se determine punctele de pe graficul funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox.

- a) $A(e, \sqrt{e})$ b) $A(1, 0)$ c) $A(e^{-2}, \frac{-2}{e})$ d) $A(e^2, 2e)$.

8. Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ și λ valoarea minimă a funcției. Atunci λ , valoarea minimă a funcției f , este egală cu:

- a) $\lambda = 1$ b) $\lambda = \frac{1}{2}$ c) $\lambda = \frac{3}{2}$ d) $\lambda = 2$

9. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\arctg(x)}{x^2 + 2}$ și $\lambda = f(0) + f'(1)$.

Atunci valoarea constantei λ este:

- a) $\lambda = \frac{3-\pi}{18}$ b) $\lambda = \frac{3+\pi}{18}$ c) $\lambda = \frac{6-\pi}{12}$ d) $\lambda = \frac{6+\pi}{12}$

10. Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln^2 x$. Alegeți afirmația corectă dintre cele de mai jos.

- a) Imaginea funcției este $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$; b) Punctul de inflexiune al funcției f este $P = (e, 1)$; c) Funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0, e]$; d) Funcția f are două puncte de extrem.

11. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos \frac{1}{x}, & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0, & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$.

Atunci mulțimea punctelor de derivabilitate ale funcției f este egală cu:

- a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; c) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$; d) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$.

12. Cea mai mică pantă posibilă a unei tangente la curba definită prin $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3$ are valoarea:

- a) $\frac{5}{2}$; b) 1; c) $-\frac{5}{2}$; d) 0.

13. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{3^x} + \frac{1}{7^x}$ și fie $\lambda = (f^{-1})'(2)$.

Atunci:

a) $\lambda = \frac{1}{\ln 21}$; **b)** $\lambda = \ln 3$; **c)** $\lambda = \frac{1}{\ln 7}$; **d)** $\lambda = -\frac{1}{\ln 21}$.

14. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \sqrt{2x^2 + 1} + 3x + m$ și fie M mulțimea acelor $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcția f este bijectivă. Atunci $\lambda = (f^{-1})'(m)$ este:

a) $\lambda = \frac{1}{3}$; **b)** $\lambda = 0$; **c)** $\lambda = 3m$; **d)** $\lambda = -\frac{1}{m^2 + 1}$.

15. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + bx + c, & \text{dacă } x < -1 \\ \arctg(2x + 2), & \text{dacă } x \geq -1 \end{cases}.$$

Știind că f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$, valoarea $f(-2)$ este:

a) $f(-2) = -3$; **b)** $f(-2) = 3$; **c)** $f(-2) = -10$; **d)** $f(-2) = 2$.

16. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{3x}, & \text{dacă } x \leq 0 \\ 3 \cdot \sin 2x + b \cdot \cos 5x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ și

fie $S = a + b$ suma parametrilor reali a și b pentru care f este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Atunci:

a) $S = 6$; **b)** $S = 4$; **c)** $S = 0$; **d)** $S = 1$.

17. Fie funcția $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ pentru $(\forall) x \in (a, b)$ și fie $c \in (a, b)$. Știind că f este derivabilă în punctul $x = c$, valoarea

$\lambda = \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x)}{f(c)} \right)^{\frac{1}{x-c}}$ este:

a) $\lambda = e^{\frac{f(c)}{f'(c)}}$; **b)** $\lambda = e^{\frac{f'(c)}{f(c)}}$; **c)** $\lambda = e^{-f'(c)}$; **d)** $\lambda = e^{-f(c) \cdot f'(c)}$.

18. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$. Fie M mulțimea absciselor punctelor x_0 situate pe graficul funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda care unește punctele de pe grafic de abscise $x = 0$ și $x = 4$. Fie $S = \sum_{x \in M} (x + f(x))$. Atunci:

a) $S = 2\sqrt{3}$; **b)** $S = 0$; **c)** $S = 4\sqrt{5}$; **d)** $S = 3\sqrt{3}$.

19. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{a \cdot x^2 - 2x + b}{x}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Știind că graficul funcției f este tangent dreptei $y = 2$ în punctul de abscisă $x = 1$, valoarea produsului $P = a \cdot b$ este:

a) $P = 4$; **b)** $P = -4$; **c)** $P = 9$; **d)** $P = 0$.

20. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = e^{3x} + 8x$. Fie $P(x_p, y_p)$ punctul de pe graficul funcției f cu proprietatea că tangenta la grafic în punctul P trece prin origine și fie $S = x_p + y_p$. Atunci:

a) $S = e^2 + 6$; **b)** $S = e^3 + 9$; **c)** $S = 1$; **d)** $S = e + 3$.

21. Folosind intervalele de monotonie ale funcției $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & \text{dacă } x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$, să se precizeze care dintre următoarele afirmații este adevărată:

a) $3^{\sqrt{5}-1} < 5^{\sqrt{3}-1}$; **b)** $2^{\sqrt{3}-1} < 3^{\sqrt{2}-1}$; **c)** $3^{1-\sqrt{\frac{1}{2}}} < 2^{1-\sqrt{\frac{1}{3}}}$; **d)** $2^{\sqrt{3}-1} > 3^{\sqrt{2}-1}$.

22. Fie S mulțimea tuturor soluțiilor inecuației $\ln(x^2 + 1) \geq 2x$. Atunci:

a) $S = (-\infty, 0]$; **b)** $S = [0, \infty)$; **c)** $S = (1, \infty)$; **d)** $S = \mathbb{R}$.

23. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{1}{4 - 3\sin x}$ și fie $S = \text{Im } f$

$\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), x \in \mathbb{R}\}$. Atunci:

$$\mathbf{a)} \ S = \left[\frac{1}{7}, 1 \right]; \mathbf{b)} \ S = \left[\frac{1}{4}, 1 \right]; \mathbf{c)} \ S = \left[\frac{1}{7}, \frac{1}{4} \right]; \mathbf{d)} \ S = [0, 1].$$

24. Fie funcția $f : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2(1+x^2)}} - \operatorname{arctg} x. \text{ Fie } S = a + b, \ a, b \in \mathbb{R}, \text{ pentru care}$$

$$f(x) = a \cdot x + b, \ (\forall) x \in [-1, \infty). \text{ Atunci:}$$

$$\mathbf{a)} \ S = \frac{\pi}{2}; \mathbf{b)} \ S = 0; \mathbf{c)} \ S = -\frac{\pi}{4}; \mathbf{d)} \ S = \frac{\pi}{4}.$$

25. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^3 - 9x$. Dacă notăm cu $f_{\min}$ valoarea minimă și cu $f_{\max}$ valoarea maximă a funcției pe intervalul $[-4, 2]$ atunci:

$$\mathbf{a)} \ f_{\min} = -28 \ f_{\max} = 6\sqrt{3}; \mathbf{b)} \ f_{\min} = -6\sqrt{3} \ f_{\max} = 6\sqrt{3};$$

$$\mathbf{c)} \ f_{\min} = -10 \ f_{\max} = 10,5; \mathbf{d)} \ f_{\min} = -28 \ f_{\max} = \sqrt{3}.$$

26. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = e^{2x} \left(x^2 - 3x - \frac{3}{2} \right)$. Dacă notăm cu m valoarea minimă și cu M valoarea maximă a funcției pe intervalul $[-2, 1]$ atunci suma $S = m + M$ este egală cu:

$$\mathbf{a)} \ S = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2e^2}; \mathbf{b)} \ S = \frac{17}{2e^4} + \frac{5}{2e^2}; \mathbf{c)} \ S = -\frac{7}{2}e^2 + \frac{17}{2e^4};$$

$$\mathbf{d)} \ S = \frac{5}{2e^2} - \frac{7}{2}e^2.$$

27. Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$ unde D este domeniul maxim de definiție. Dacă notăm cu M mulțimea absciselor punctelor de extrem ale funcției f atunci:

$$\mathbf{a)} \ M = \{0, 6\}; \mathbf{b)} \ M = \emptyset; \mathbf{c)} \ M = \{3\}; \mathbf{d)} \ M = \{3, 6\}.$$

28. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{x^2 - ax}{\sqrt{x^2 + 3}}$ unde $a \in \mathbb{R}$. Să

se determine parametrul real a pentru care funcția f admite un punct de extrem situat la distanța 3 de axa Oy .

a) $a \in \{-15, 12\}$; **b)** $a \in \{-12, 15\}$; **c)** $a \in \{-15, 15\}$; **d)** $a \in \{-12, 12\}$.

29. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$

și $g(x) = e^x$. Atunci dacă notăm cu $\alpha = (g \circ f)'(0)$ vom avea egalitatea:

a) $\alpha = 0$; **b)** $\alpha = 1$; **c)** α nu există; **d)** $\alpha = \frac{1}{2}$.

30. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (3, \infty)$ definită prin $f(x) = 3^x + 9^x + 3$. Dacă notăm cu $\alpha = (f^{-1})'(5)$ atunci valoarea lui α este egală cu:

a) $\alpha = \frac{1}{3 \ln 3}$; **b)** $\alpha = \frac{1}{21 \ln 3}$ **c)** $\alpha = \frac{1}{5}$; **d)** $\alpha = \frac{1}{\ln 9}$.

31. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1}$ și fie A mulțimea absciselor tuturor punctelor în care funcția f este derivabilă. Atunci:

a) $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; **b)** $A = \mathbb{R}$; **c)** $A = (-1, 1)$; **d)** $A = [-1, 1]$.

32. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x}$. Tangenta la graficul funcției f în punctul M de abscisă $x = 2$ taie a doua oară graficul funcției în punctul P . Fie m panta tangentei la grafic în punctul P . Atunci:

a) $m = -9$; **b)** $m = \frac{9}{2}$; **c)** $m = -\frac{15}{3}$; **d)** $m = 0$.

33. Fie funcția $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ x^3 + bx^2 + dx, & \text{dacă } x \in (1, 2] \end{cases}$

unde parametrii reali a, b, d sunt astfel încât se poate aplica teorema Rolle funcției f pe intervalul $[0, 2]$. Dacă A este mulțimea punctelor $c \in (0, 2)$ obținute prin aplicarea teoremei Rolle funcției f pe intervalul $[0, 2]$ și dacă $\lambda = \sum_{c \in A} c$ atunci:

a) $\lambda = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$; **b)** $\lambda = \frac{11-\sqrt{7}}{3}$; **c)** $\lambda = \frac{11+\sqrt{7}}{7}$; **d)** $\lambda = \frac{8}{3}$.

34. Fie ecuația $2\ln x = mx^2 + 1$ unde m este un parametru real. Fie A mulțimea tuturor valorilor parametrului real m pentru care ecuația admite două soluții reale. Atunci:

a) $A = \left(0, \frac{1}{e^2}\right)$; **b)** $A = (-\infty, 1)$; **c)** $A = (1, e)$; **d)** $A = (1, e^2)$.

35. Fie ecuația $\sin 2x + 2\sin x = m$ unde m este un parametru real. Fie A mulțimea valorilor parametrului real m pentru care ecuația are două soluții reale situate în intervalul $(0, 2\pi)$. Atunci:

a) $A = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \setminus \{0\}$; **b)** $A = \mathbb{R}^*$; **c)** $A = [-2, 2] \setminus \{0\}$; **d)** $A = \emptyset$.

36. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{e^{|x|}}{x+1}$. Fie A mulțimea absciselor punctelor de extrem local ale funcției f și $B = f(A)$. Atunci:

a) $A = \{-2\}$; **b)** $B = \{-e^2, 1\}$; **c)** $B = \{-e^3\}$; **d)** $A = \{0\}$.

37. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = (1+x)e^{-|1-x|}$. Fie A mulțimea absciselor punctelor de inflexiune ale funcției f . Atunci:

a) $A = \{1\}$; **b)** $A = \{-3\}$; **c)** $A = \{-1\}$; **d)** $A = \{-3, 1\}$.

38. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \ln(1+e^x) - x - \lambda$ unde λ este un parametru real. Cea mai mică valoare a parametrului real λ pentru care $f(x) < 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$ este:

a) $\lambda = 3$; **b)** $\lambda = 1$; **c)** $\lambda = \ln 3$; **d)** $\lambda = \ln 2$.

39. Fie funcția $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ unde a, b, c, d sunt parametrii reali nenuli. Se consideră funcția f astfel încât tangenta la grafic în punctul de abscisă $x=1$ să fie paralelă cu prima bisectoare, iar graficul funcției f să admită dreptele $y=3$ și $x=-1$ ca asimptote. Fie $S = a + b + c + d$. Atunci:

a) $S = 4c$; **b)** $S = 2d$; **c)** $S = -2b$; **d)** $S = 0$.

40. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = |x|(x^2 - 3)$. Atunci funcția f admite:

a) două puncte de extrem local; **b)** un punct de extrem local;
c) un punct de minim local; **d)** trei puncte de extrem local.

41. Fie funcția $f: [-2\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x + \sin 2x$. Fie A mulțimea punctelor $c \in (-2\pi, 2\pi)$ obținute prin aplicarea teoremei lui Lagrange funcției f pe intervalul $[-2\pi, 2\pi]$. Atunci:

a) $A = \left\{ \pm \frac{2\pi}{3}, \pm \frac{4\pi}{3} \right\}$; **b)** $A = \left\{ \pm \frac{\pi}{2} \right\}$; **c)** $A = \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2} \right\}$;

d) $A = \left\{ \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pm \frac{5\pi}{4}, \pm \frac{7\pi}{4} \right\}$.

42. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = |x+1|e^{-|x-3|}$ și fie A mulțimea tuturor absciselor punctelor de extrem local ale funcției f . Atunci:

a) $A = \{-2, -1, 3\}$; **b)** $A = \{-1\}$; **c)** $A = \{-2\}$; **d)** $A = \{-2, 3\}$.

43. Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definită prin $f(x) = (x^3)^{x^2}$. Dacă notăm cu $\lambda = f'(3)$ atunci:

- a)** $\lambda = 18 \cdot 27^9$; **b)** $\lambda = 9^9 (\ln 9 + 9)$; **c)** $\lambda = 27^3 (\ln 27 + 9)$;
d) $\lambda = 9 \cdot 27^9 \ln(9e)$.

44. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și derivabilă pe intervalul $[a, b]$ având derivata continuă și injectivă pe $[a, b]$. Fie c_x valoarea punctului c obținut prin aplicarea teoremei Lagrange funcției f pe intervalul $[a, x]$, $x \in (a, b]$ și fie $l = \lim_{x \rightarrow a} c_x$. Atunci:

- a)** $l = a$; **b)** limita l nu există; **c)** $l = \frac{a+b}{2}$; **d)** $l = \sqrt{ab}$.

45. Fie funcția $f : (-3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$. Să se determine abscisa x_0 a unui punct situat pe graficul funcției f în care tangenta la grafic să fie paralelă cu coarda care unește punctele de pe grafic de abscise $x = 0$ și $x = 3$. Atunci:

- a)** $x_0 = -1 - \sqrt{2}$; **b)** $x_0 = 3 - 3\sqrt{2}$; **c)** $x_0 = -3 + \sqrt{2}$; **d)** $x_0 = -3 + 3\sqrt{2}$.

46. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)}}$.

Să se precizeze care dintre următoarele afirmații este adevărată:

- a)** Punctul $A\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$ este punct de discontinuitate pentru funcția f ;
b) Funcția f este derivabilă în punctul de abscisă $x = -2$ și punctul $A\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$ este punct de inflexiune pentru funcția f ;
c) Punctul $A\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$ este punct de întoarcere pentru funcția f ;
d) Punctul $A\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$ este punct unghiular pentru funcția f .

47. Fie ecuația $2\ln x + x^2 - 4x + m^2 - m + 1 = 0$ unde m este un parametru real. Fie A mulțimea valorilor parametrului real m pentru care ecuația are o soluție reală, supraunitară. Atunci:

a) $A = (-1, 2)$; **b)** $A = (-\infty, -1)$; **c)** $A = (2, \infty)$; **d)** $A = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

48. Fie funcția $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$. Dacă n este numărul punctelor de extrem local pentru funcția f , iar p este numărul punctelor sale de inflexiune și dacă $S = n + p$, atunci:

a) $S = 2$; **b)** $S = 0$; **c)** $S = 1$; **d)** $S = 4$.

49. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2^{x^4} + 2^{x^2-1}$. Fie α numărul punctelor de extrem local pentru funcția f și β este numărul punctelor sale de inflexiune. Dacă $S = \alpha + \beta$, atunci:

a) $S = 1$; **b)** $S = 3$; **c)** $S = 2$; **d)** $S = 4$.

50. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = ax^2 + bx + 2$ și $g(x) = \frac{x-1}{x}$ unde $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă considerăm pentru parametrii reali a, b acele valori pentru care graficele funcțiilor au tangentă comună în punctul de abscisă $x=1$ și dacă $P = a \cdot b$ atunci:

a) $P = -1$; **b)** $P = 3$; **c)** $P = 0$; **d)** $P = -15$.

SOLUȚII
ANALIZĂ MATEMATICĂ
Derivabilitate

1. Cum $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $f(x) = e^{3x}(2x+1)^3$ rezultă că $f'(x) = 3e^{3x}(2x+1)^3 + 6e^{3x}(2x+1)^2$ și $f'(0) = 9$

Răspunsul corect este a).

2. Cum $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^x - a^x - x^a$, $a > 0$ rezultă că $f'(x) = x^x(\ln x + 1) - a^x \ln a - ax^{a-1}$. Atunci λ , valoarea derivatei funcției f în punctul $x = a$, este egală cu $f'(a) = a^a(\ln a + 1) - a^a \ln a - aa^{a-1} = 0$.

Răspunsul corect este b).

3. Cum $f'(x) = e^x(x^2 + 6x + m + 4)$ funcția are puncte de extrem doar dacă ecuația $f'(x) = 0$ are soluții reale distincte, adică $\Delta > 0$.

Atunci $20 - 4m > 0$, adică mulțimea M a valorilor parametrului real m pentru care $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 + 4x + m)$ are puncte de extrem este egală cu $(-\infty, 5)$

Răspunsul corect este c).

4. Cum punctul $P(-1, 3)$ aparține graficului funcției rezultă că $f(-1) = 2 - a + b = 3$ și cum tangenta la graficul funcției în acest punct este paralelă cu prima bisectoare rezultă că $f'(-1) = -4 + a = 1$. Atunci $a = 5$ și $b = 6$, deci $S = 61$.

Răspunsul corect este d).

5. Cum $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = \frac{x}{e^{2x}} = xe^{-2x}$ rezultă că

$$f_1(x) = f_0'(x) = e^{-2x}(1-2x) \text{ și } f_2(x) = f_1'(x) = 4e^{-2x}(x-1).$$

$$\text{Deci } f_2(2) = \frac{4}{e^4}.$$

Răspunsul corect este **a**).

6. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0 are ecuația $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Dar $f(x_0) = f(1) = 0$ și

$$f'(x_0) = 1 - \frac{1}{2025\sqrt{x_0^{2024}}}, \text{ adică } f'(x_0) = f'(1) = 0. \text{ Deci ecuația tangentei la graficul}$$

funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$ este $y = 0$

Răspunsul corect este **b**).

7. Pentru funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ derivata este egală cu

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}(\ln x + 2)}{2x}. \text{ Ecuația } f'(x) = 0 \text{ are soluția } x = e^{-2} \text{ iar } f(e^{-2}) = \frac{-2}{e}. \text{ Deci}$$

$$A(e^{-2}, \frac{-2}{e}).$$

Răspunsul corect este **c**).

8. Pentru funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ derivata este egală cu

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} \text{ și este negativă pentru } x \in (0, 1) \text{ și pozitivă pentru } x \in (1, \infty). \text{ Atunci}$$

punctul de coordonate $(1, 2)$ este punctul de minim al funcției f . Deci $\lambda = 2$.

Răspunsul corect este **d**).

9. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\arctg(x)}{x^2 + 2}$ derivata este egală cu

$$f'(x) = \frac{\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} - 2x \arctg(x)}{(x^2 + 2)^2}. \text{ Atunci } f(0) = 0 \text{ iar } f'(1) = \frac{3 - \pi}{18}. \text{ Deci valoarea}$$

constantei $\lambda = f(0) + f'(1)$ este $\lambda = \frac{3 - \pi}{18}$.

Răspunsul corect este a).

10. Pentru funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln^2 x$ derivata de ordinul întâi este egală cu $f'(x) = \frac{2 \ln(x)}{x}$ iar derivata de ordinul al doilea este egală cu $f''(x) = \frac{2(1 - \ln(x))}{x^2}$. Cum $f''(x) = 0$ implică $x = e$ și $f(e) = 1$ rezultă că punctul de inflexiune al funcției f este $P = (e, 1)$.

Răspunsul corect este b).

$$11. \quad f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0, & \text{pentru } x = 0 \end{cases}.$$

Cum $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0 = f'(0)$, rezultă că mulțimea punctelor de derivabilitate ale funcției f este $\mathbb{R}$.

Răspunsul corect este a).

12. Cum $f'(x) = 6x^2 - 6x + 4$, valoarea minimă este $y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$, de unde rezultă $y_{\min} = -\frac{36 - 96}{24} = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}$.

Răspunsul corect este a).

13. Funcția f este bijectivă, $f'(x) = \frac{1}{3^x} \cdot \ln \frac{1}{3} + \frac{1}{7^x} \cdot \ln \frac{1}{7}$.

$$f(x) = 2 \Rightarrow x = 0, \text{ deci } \lambda = (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\ln \frac{1}{21}} = -\frac{1}{\ln 21}.$$

Răspunsul corect este **d**).

14. Funcția f este bijectivă, $f'(x) = \frac{2x}{2x^2 + 1} + 3$. Evident că $f(x) = m$

implică $x = 0$, deci $\lambda = (f^{-1})'(m) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$.

Răspunsul corect este **a**).

15. Funcția f este continuă în $x = -1$, deci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -1 + a - b + c = 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x).$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2ax + b, & \text{pentru } x < -1 \\ \frac{2}{1 + (2x + 2)^2}, & \text{pentru } x > -1 \end{cases}, \text{ dar funcția este derivabilă în } x = -1$$

rezultă că $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f'(x) = 3 - 2a + b = 2 = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f'(x)$.

$$f''(x) = \begin{cases} 6x + 2a, & \text{pentru } x < -1 \\ -\frac{8(2x + 2)}{(1 + (2x + 2)^2)^2}, & \text{pentru } x > -1 \end{cases} \text{ și cum funcția este de două ori}$$

derivabilă în $x = -1$, rezultă că $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f''(x) = -6 + 2a = 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f''(x)$.

Rezultă:

$$2a = 6 \Rightarrow a = 3, \quad 3 - 6 + b = 2 \Rightarrow b = 5 \text{ și } -1 + 3 - 5 + c = 0 \Rightarrow c = 3.$$

$$f(-2) = -8 + 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 3 = -3.$$

Răspunsul corect este **a**).

16. Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = a = b = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x).$$

Derivata funcției este $f'(x) = \begin{cases} 3a \cdot e^{3x}, & \text{pentru } x < 0 \\ 6\cos 2x - 5b\sin 5x, & \text{pentru } x > 0 \end{cases}.$

Funcția f este derivabilă în $x = 0$ dacă și numai dacă

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = 3a = 6 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x),$$

deci $a = b = 2$, ceea ce implică $S = 4$.

Răspunsul corect este **b**).

$$17. \quad \lambda = \lim_{x \rightarrow c} \left[\left(1 + \frac{f(x) - f(c)}{f(c)} \right)^{\frac{f(c)}{f(x) - f(c)}} \right]^{\frac{f(x) - f(c)}{f(c)(x - c)}} = e^{\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \frac{1}{f(c)}} = e^{\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

Răspunsul corect este **b**).

18. Punctele de pe grafic sunt $A(0,3)$ și $B(4,5)$, iar panta coardei AB este $m_{AB} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$. Panta tangentei la grafic este $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$. Rezultă

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}.$$

$$\text{Deci } S = \sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Răspunsul corect este **d**).

19. $f(1) = 2 \Rightarrow a - 2 + b = 2 \Rightarrow a + b = 4$, deci

$$f'(x) = \frac{(2ax - 2) \cdot x - ax^2 + 2x - b}{x^2} = \frac{ax^2 - b}{x^2},$$

ceea ce implică $f'(1) = a - b = 0$.

$$\text{Rezultă } \begin{cases} a+b=4 \\ a-b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=2 \Rightarrow P=4.$$

Răspunsul corect este **a**).

20. Fie $(x_0, f(x_0))$ un punct pe graficul funcției f . Tangenta în acest punct la grafic este $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Ea trece prin origine dacă și numai dacă $-f(x_0) = -x_0 \cdot f'(x_0)$, adică

$$e^{3x_0} + 8x_0 = x_0(3e^{3x_0} + 8) \Leftrightarrow (3x_0 - 1) \cdot e^{3x_0} = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Rezultă } S = \frac{1}{3} + e + \frac{8}{3} = e + 3.$$

Răspunsul corect este **d**).

21. Funcția f este continuă pe $(0, \infty)$ deoarece

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x-1)}{x-1} = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}, & \text{pentru } x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \\ -\frac{1}{2}, & \text{pentru } x = 1 \end{cases} \quad \text{deoarece } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

Fie funcția $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - 1 - x \ln x$. Atunci, $g'(x) = -\ln x$.

x		0	1
$g'(x)$		+++	0 ---
$g(x)$			0

Rezultă că pentru $(\forall) x \in (0, \infty)$ avem $g(x) < g(1) = 0$.

x		0
$f'(x)$		-----
$f(x)$		

Deci, f este descrescătoare pe $(0, \infty)$.

$$\begin{aligned} \text{Fie acum } \sqrt{2} < \sqrt{3} &\Rightarrow f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{3}) \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{\sqrt{2}-1} > \frac{\ln 3}{\sqrt{3}-1} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{3}-1) \cdot \ln 2 > (\sqrt{2}-1) \cdot \ln 3 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{3}-1} > 3^{\sqrt{2}-1}. \end{aligned}$$

Răspunsul corect este **d**).

$$22. \text{ Fie } g(x) = \ln(x^2 + 1) - 2x.$$

Atunci $g'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 2 = \frac{2(-x^2+x-1)}{x^2+1} < 0$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$, ceea ce implică g este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ și cum $g(0) = 0$, rezultă $g(x) \geq 0$, $(\forall)x \in (-\infty, 0]$.

Răspunsul corect este **a**).

23. Funcția f este periodică de perioadă $T = 2\pi$.

$$f'(x) = \frac{3\cos x}{(4-3\sin x)^2}.$$

x	0	$\pi/2$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f'(x)$	+++	0	---	0	+++
$f(x)$	1/4	1	1/7	1/4	1/4

Răspunsul corect este **a**).

$$\begin{aligned} 24. \quad f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)}}} \cdot \frac{\sqrt{2(1+x^2)} - (x-1) \cdot \frac{2x}{\sqrt{2(1+x^2)}}}{2(1+x^2)} - \frac{1}{1+x^2} = \\ &= \frac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2} & \text{pentru } x < -1 \\ 0 & \text{pentru } x > -1 \end{cases}, \text{ de unde rezultă că funcția} \\ f &\text{ este constantă pe } (-1, \infty). \end{aligned}$$

$$f(0) = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arctg} 0 = -\frac{\pi}{4}, \text{ ceea ce implică } a=0 \text{ și } b=-\frac{\pi}{4}, \text{ deci}$$

$$S = -\frac{\pi}{4}.$$

Răspunsul corect este c).

$$25. \quad f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3).$$

x		-4	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2	
$f'(x)$		+++	0	---	0	+++
$f(x)$		-28	$\nearrow 6\sqrt{3}$	$\searrow -6\sqrt{3}$	$\nearrow -10$	

Rezultă $f_{\max} = 6\sqrt{3}$ și deoarece $-28 < -6\sqrt{3}$, $f_{\min} = -28$.

Răspunsul corect este a).

$$26. \quad f'(x) = e^{2x} \cdot (2x^2 - 6x - 3 + 2x - 3) = e^{2x} \cdot (2x^2 - 4x - 6) = \\ = 2e^{2x} \cdot (x^2 - 2x - 3).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} \cdot (x^2 - 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$$

x	0	-2	-1	1	3
$f'(x)$	+++	++++	0	----	0++
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow m$	$\nearrow f(3)$

$f(-1) = e^{-2} \cdot \left(1 + 3 - \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2 \cdot e^2} = M$ și cum pentru funcția f se cer valorile extreme pe intervalul $[-2, 1]$ vom calcula valorile în capetele intervalului

$$f(-2) = e^{-4} \cdot \left(4 + 6 - \frac{3}{2}\right) = \frac{17}{2 \cdot e^4} \quad \text{și} \quad f(1) = e^2 \cdot \left(1 - 3 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{7 \cdot e^2}{2} = m, \text{ deci}$$

$$S = M + m = -\frac{7e^2}{2} + \frac{5}{2e^2}.$$

Răspunsul corect este d).

27. $x^2 - 6x \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [6, \infty) = D$. Atunci, derivata funcției $f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x}}$ este definită pe $(-\infty, 0) \cup (6, \infty)$. Observăm că $f'(x) < 0$ pe $(-\infty, 0)$ și $f'(x) > 0$ pe $(6, \infty)$. Deci, punctele $A(0, 0)$ și $B(6, 0)$ sunt puncte de minim local, deci puncte de extrem.

Răspunsul corect este a).

28. Derivata funcției f este $f'(x) = \frac{x^3 + 6x - 3a}{\sqrt{(x^2 + 3)^3}}$. Pentru ca funcția f

să admită un punct de extrem situat la distanța 3 de axa Oy trebuie ca: $f'(3) = 0 \Leftrightarrow a = 15$ sau $f'(-3) = 0 \Leftrightarrow a = -15$. Deci $a \in \{-15, 15\}$.

Răspunsul corect este c).

29. Din formula de derivare a funcțiilor compuse rezultă $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ adică $(g \circ f)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0) = e^0 \cdot f'(0)$.

Dar $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, deci $\alpha = 0$.

Răspunsul corect este a).

30. Funcția f este o funcție strict crescătoare, deci injectivă. Deoarece f este o funcție continuă și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ iar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ rezultă că funcția este și surjectivă. Deci, funcția f este o funcție bijectivă și inversabilă.

Deoarece ecuația $f(x) = 5$ are soluția unică $x = 0$ rezultă că $\alpha = (f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3 \ln 3}$.

Răspunsul corect este a).

$$31. \quad f'(x) = \frac{-2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)|x^2 - 1|} = \begin{cases} \frac{2}{(x^2 + 1)}, & \text{dacă } |x| < 1 \\ \frac{-2}{(x^2 + 1)}, & \text{dacă } |x| > 1 \end{cases}.$$

Studiem comportarea în punctele de abscisă $x=1$ și $x=-1$ cu consecința teoremei lui Lagrange. Dar cum $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f'(x) = -1$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f'(x) = 1$ iar

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = 1$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f'(x) = -1$ funcția f este derivabilă pe $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Răspunsul corect este a).

$$32. \quad f'(x) = \frac{2x^3 - 2}{x^2} \text{ și } f'(2) = \frac{7}{2}. \text{ Atunci tangenta în punctul } M \text{ la grafic}$$

este $y = \frac{7}{2}x - 2$. Abscisa punctului P este soluția ecuației $\frac{x^3 + 2}{x} = \frac{7}{2}x - 2$, adică

$2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = 0$. Știm că ecuația obținută are rădăcina dublă $x = 2$ și rezultă că abscisa punctului P este $x = -\frac{1}{2}$. Atunci panta tangentei la grafic în

punctul P este egală cu $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -9$.

Răspunsul corect este a).

33. Pentru a putea aplica teorema lui Rolle funcției f pe intervalul $[0, 2]$ trebuie ca:

- funcția f să fie continuă pe intervalul $[0, 2] \Leftrightarrow 1 + a = 1 + b + d$

- funcția f să fie derivabilă pe intervalul $(0, 2) \Leftrightarrow$ funcția f' să

fie continuă în $x=1$. Dar $f'(x) = \begin{cases} 2x + a, & \text{dacă } x \in (0, 1) \\ 3x^2 + 2bx + d, & \text{dacă } x \in (1, 2) \end{cases}$ și, deci,

$$2 + a = 3 + 2b + d \text{ și}$$

$$- f(0) = f(2) \Leftrightarrow 0 = 8 + 4b + 2d.$$

Rezolvând sistemul obținut rezultă $a = -3, b = -1, d = -2$.

Atunci ecuația $f'(x) = 0$ devine $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \notin (0, 1)$ sau $3x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$ și cum $c \in (1, 2) \Rightarrow c = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$. Deci $\lambda = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$.

Răspunsul corect este **a**).

34. Ecuația este $2 \ln x - mx^2 - 1 = 0$. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \ln x - mx^2 - 1$. Rezultă $f'(x) = \frac{2}{x} - 2mx = \frac{2(1 - mx^2)}{x}$.
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow mx^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{m}}$, dacă $m > 0$ și cum $x \in (0, \infty)$, rezultă $x = \sqrt{\frac{1}{m}}$. Dacă $m \leq 0$ atunci $f' > 0$ pe $(0, \infty)$ funcția este strict crescătoare și are o singură rădăcină reală.

Construind tabelul din șirul lui Rolle

x	0	$\sqrt{\frac{1}{m}}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\ln \frac{1}{m} - 2$	$-\infty$

rezultă că ecuația are două rădăcini reale dacă și numai dacă

$$\ln \frac{1}{m} - 2 > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{m} > 2 \Rightarrow \frac{1}{m} > e^2 \Rightarrow m < \frac{1}{e^2}, \text{ deoarece } m > 0 \text{ și } e^2 > 0.$$

Astfel, dacă $m \in \left(0, \frac{1}{e^2}\right)$, ecuația dată are două rădăcini reale.

Răspunsul corect este **a**).

35. Fie $f(x) = \sin 2x + 2 \sin x - m$. Rezultă $f'(x) = 2 \cos 2x + 2 \cos x$.
 Atunci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1$, sau $\cos x = \frac{1}{2}$.

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x \in \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad x \in (0, 2\pi) \Rightarrow x = \pi.$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad x \in (0, 2\pi) \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}.$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$f(x)$	$-m$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} - m$	$-m$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2} - m$	$-m$
$m \in (-\infty, 0)$	+	+	+	*	+
$m = 0$	0	+	0	-	0
$m \in (0, \infty)$	-	*	-	-	-

Astfel, dacă $m \in (-\infty, 0)$ ecuația are două rădăcini reale în $(0, 2\pi)$ dacă și numai

dacă $-m - \frac{3\sqrt{3}}{2} < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Dacă $m \in (0, +\infty)$, atunci ecuația are două

rădăcini reale în $(0, 2\pi)$ dacă și numai dacă $\frac{3\sqrt{3}}{2} - m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Rezultă

$$A = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \setminus \{0\}.$$

Răspunsul corect este **a**).

$$36. \text{ Funcția } f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x+1} & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \setminus \{-1\} \\ \frac{e^x}{x+1} & \text{dacă } x \in [0, \infty) \end{cases}.$$

$$\text{Atunci, } f'(x) = \begin{cases} \frac{-e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2} & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \setminus \{-1\} \\ \frac{x \cdot e^x}{(x+1)^2} & \text{dacă } x \in (0, \infty) \end{cases}.$$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = -2 \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = 0$ și, deci, funcția nu este derivabilă în $x = 0$.

x	$-\infty$	-2	-1	0	∞
$f'(x)$	+++	0	---	---	+++
$f(x)$	$\nearrow M$		$\searrow$	m	$\nearrow$

Rezultă $A = \{-2, 0\}$. $f(-2) = -e^2$ și $f(0) = 1$, deci $B = \{-e^2, 1\}$.

Răspunsul corect este **b**).

$$37. \quad f(x) = \begin{cases} (1+x) \cdot e^{x-1}, & \text{dacă } x < 1 \\ (1+x) \cdot e^{1-x}, & \text{dacă } x \geq 1 \end{cases}.$$

$$\text{Atunci, } f'(x) = \begin{cases} (2+x) \cdot e^{x-1}, & \text{dacă } x < 1 \\ (-x) \cdot e^{1-x}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}.$$

Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = 3 \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f'(x) = -1$, rezultă că funcția f nu este derivabilă în

$x = 1$.

$$f''(x) = \begin{cases} (3+x) \cdot e^{x-1}, & \text{dacă } x < 1 \\ (x-1) \cdot e^{1-x}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \in (-\infty, 1) \text{ și}$$

$x = 1 \notin (1, \infty)$. Rezultă $A = \{-3\}$.

Răspunsul corect este **b**).

$$38. \quad f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - 1 = \frac{-1}{1+e^x}. \text{ Rezultă că funcția } f \text{ este descrescătoare}$$

$(\forall) x \in \mathbb{R}$ și astfel, $(\forall) x \in (0, \infty) \Rightarrow f(x) < f(0) = \ln 2 - \lambda$.

Deci, $f(x) < 0$, $(\forall) x \in (0, \infty)$ dacă și numai dacă $\ln 2 - \lambda \leq 0 \Rightarrow \lambda \geq \ln 2$.

Rezultă că cea mai mică valoare pentru care inegalitatea este îndeplinită este $\lambda = \ln 2$.

Răspunsul corect este **d**).

$$39. \quad y = 3 \text{ asimptotă orizontală implică } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3, \text{ adică } a = 3c.$$

$x = -1$ asimptotă verticală implică $-c + d = 0 \Leftrightarrow c = d$.

$$\text{Rezultă } f'(x) = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}.$$

$f'(1)=1 \Rightarrow \frac{ad-bc}{(c+d)^2}=1$, deci $a=3c$, $d=c$ și $\frac{3c^2-bc}{4c^2}=1$, ceea ce implică $3c-b=4c \Rightarrow b=-c$.

Atunci, $a=3c$, $b=-c$, $c=c$, $d=c \Rightarrow f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$.

Răspunsul corect este **a**).

$$40. f(x) = \begin{cases} -x(x^2-3), & \text{dacă } x < 0 \\ x(x^2-3), & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Rezultă } f'(x) = \begin{cases} -3x^2+3, & \text{dacă } x < 0 \\ 3x^2-3, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}.$$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = 3 \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = -3$, deci funcția f nu este derivabilă în $x=0$.

x	-1				0	1					
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$ $	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$		

$x=0$ este punct de maxim local, iar $x=1$ și $x=-1$ sunt puncte de minim local. Deci funcția are trei puncte de extrem local.

Răspunsul corect este **d**).

41. Funcția f este continuă pe $[-2\pi, 2\pi]$ și derivabilă pe $(-2\pi, 2\pi)$. Din teorema lui Lagrange, rezultă că $(\exists)c \in (-2\pi, 2\pi)$, astfel încât

$$\frac{f(2\pi) - f(-2\pi)}{2\pi - (-2\pi)} = f'(c), \text{ adică } \frac{2\pi + 0 - (-2\pi)}{4\pi} = 1 + 2\cos 2c \Leftrightarrow$$

$$1 = 1 + 2\cos 2c \Leftrightarrow \cos 2c = 0 \Leftrightarrow c \in \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}.$$

$$\text{Deci, } A = \left\{ \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pm \frac{5\pi}{4}, \pm \frac{7\pi}{4} \right\}.$$

Răspunsul corect este **d**).

42. Explicitând modulele obținem $f(x) = \begin{cases} (-x-1)e^{x-3}, & \text{dacă } x \leq -1 \\ (x+1)e^{x-3}, & \text{dacă } x \in (-1, 3] \\ (x+1)e^{3-x}, & \text{dacă } x \in (3, \infty) \end{cases}$

Atunci, $f'(x) = \begin{cases} -(x+2)e^{x-3}, & \text{dacă } x < -1 \\ (x+2)e^{x-3}, & \text{dacă } x \in (-1, 3) \\ -xe^{3-x}, & \text{dacă } x \in (3, \infty) \end{cases}$

Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f'(x) = -\frac{1}{e^4} \neq \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f'(x) = \frac{1}{e^4}$, rezultă că funcția f nu este

derivabilă în $x = -1$. Și cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f'(x) = 5 \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f'(x) = -3$, rezultă că funcția

f nu este derivabilă în $x = 3$. Din tabelul de variație

x	$-\infty$	-2	-1	3	∞
$f'(x)$	+++	0	---	+++	---
$f(x)$	0	$\frac{1}{e^5}$	0	4	0

rezultă că mulțimea absciselor punctelor de extrem local ale funcției f este $A = \{-2, -1, 3\}$.

Răspunsul corect este a).

43. Fie $f(x) = (x^3)^{x^2} = x^{3x^2} = e^{3x^2 \ln x}$.

Atunci $f'(x) = 3x \cdot x^{3x^2} \cdot (2 \ln x + 1)$. Atunci $\lambda = f'(3) = 9 \cdot 27^9 (2 \ln 3 + 1)$.

Răspunsul corect este d).

44. Aplicând teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $[a, x]$ rezultă că $(\exists) c_x \in (a, x)$, astfel încât $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$. Dar deoarece funcția f este derivabilă pe intervalul $[a, b]$ rezultă și că $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ și prin

urmare $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f'(c_x) = f'(a)$. Cum $c_x \in (a, x)$ și funcția f' este continuă și

injectivă rezultă că $\lim_{x \rightarrow a} c_x = a$.

Răspunsul corect este a).

45. Calculăm $f'(x) = \frac{7}{(x+3)^2}$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției

f pe intervalul $[0, 3]$ rezultă că $(\exists) c \in (0, 3)$, astfel încât $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{7}{(c+3)^2}$

. Atunci $\frac{7}{18} = \frac{7}{(c+3)^2} \Leftrightarrow (c+3) = \pm\sqrt{18}$. Dar $c \in (0, 3) \Rightarrow c = -3 + 3\sqrt{2}$. Deci,

punctul căutat este $x_0 = -3 + 3\sqrt{2}$.

Răspunsul corect este d).

$$46. \quad f'(x) = \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)}} \right)' = \frac{(x+2)}{|x+2|(x^2 + 2x + 2)}.$$

$$\text{Atunci, } f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x^2 + 2x + 2)} & \text{dacă } x < -2 \\ \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)} & \text{dacă } x > -2 \end{cases}$$

și cum $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f'(x) = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f'(x)$, rezultă că funcția f nu este derivabilă

în $x = -2$ și punctul $A\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$ este punct unghiular pentru funcția f .

Răspunsul corect este d).

47. Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$f(x) = 2\ln x + x^2 - 4x + m^2 - m + 1$. Atunci $f'(x) = \frac{2(x-1)^2}{x}$. Folosind șirul lui Rolle deducem că ecuația $f(x) = 0$ are o rădăcină reală supraunitară dacă și numai dacă $m^2 - m - 2 < 0$.

x	0	1	∞
$f(x)$	–	$m^2 - m - 2$	+

Dar $m^2 - m - 2 < 0 \Leftrightarrow m \in (-1, 2)$, deci mulțimea valorilor parametrului real m pentru care ecuația are o soluție reală, supraunitară este $A = (-1, 2)$.
Răspunsul corect este a).

48. Funcția $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ se poate scrie și $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ și atunci $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$. Deoarece $f': (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ rezultă că funcția considerată nu are puncte de extrem, adică $n = 0$. Funcția $f'': (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ este egală cu $f''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$ și atunci $x = 0$ este abscisa unicului punct de inflexiune pentru funcția f , adică $p = 1$. Deoarece $S = n + p$ rezultă că $S = 1$.
Răspunsul corect este c).

49. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2^{x^4} + 2^{x^2-1}$. Atunci $f'(x) = (2^{x^4} + 2^{x^2-1})' = x \cdot \ln 2 \cdot (4x^2 2^{x^4} + 2^{x^2})$. Cum $4x^2 2^{x^4} + 2^{x^2} > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ rezultă că $x = 0$ este singura soluție a ecuației $f'(x) = 0$ și punctul $A = \left(0, \frac{3}{2}\right)$ este singurul punct de extrem local pentru funcția f , adică $\alpha = 1$. Deoarece $f''(x) = \ln 2 \cdot (12x^2 2^{x^4} + 16x^6 2^{x^4} \ln 2 + 2^{x^2} + 2x^2 2^{x^2} \ln 2)$ și este strict pozitivă pentru orice $x \in \mathbb{R}$ rezultă că funcția f nu are puncte de inflexiune, deci $\beta = 0$. Cum $S = \alpha + \beta$ atunci $S = 1$.
Răspunsul corect este a).

50. Pentru ca funcțiile $f, g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = ax^2 + bx + 2$ și $g(x) = \frac{x-1}{x}$ să aibă o tangentă comună în punctul de abscisă $x=1$ trebuie ca $f(1) = g(1)$ și $f'(1) = g'(1)$. Cum $f'(x) = 2ax + b$ și $g'(x) = \frac{1}{x^2}$ rezultă că $f(1) = g(1) \Rightarrow a + b + 2 = 0$ și $f'(1) = g'(1) \Rightarrow 2a + b = 1$. Atunci $a = 3$ și $b = -5$ și cum $P = a \cdot b$ atunci $P = -15$.

Răspunsul corect este d).

ENUNȚURI
ANALIZĂ MATEMATICĂ
Integrabilitate

1. Fie $F : (0,10) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $F(x) = \begin{cases} \ln^3 x, & x \in (0,e] \\ ax + b, & x \in (e,10) \end{cases}$, unde

$a, b \in \mathbb{R}$ sunt aleși astfel încât F este o primitivă pe $(0,10)$ a unei funcții $f : (0,10) \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă $P = a \cdot b$, atunci:

a) $P = 10 - e$; **b)** $P = 4e$; **c)** $P = -\frac{6}{e}$; **d)** $P = \frac{e}{2}$.

2. Fie funcția $F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $P = a \cdot b$

$F(x) = a \ln(x+1) + b \ln(x^2+1) + c \arctg x$. Valorile $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care F

este o primitivă a funcției $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ sunt:

a) $a = -1, b = \frac{1}{2}, c = -1$; **b)** $a = 1, b = \frac{1}{2}, c = 1$; **c)** $a = -1, b = \frac{1}{2}, c = 1$;

d) $a = -1, b = -\frac{1}{2}, c = 1$.

3. Valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = e^{-x}(a \sin 2x + b \cos 2x)$ este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = e^{-x}(\sin 2x + \cos 2x)$ sunt:

a) $a = \frac{1}{5}, b = -\frac{3}{5}$; **b)** $a = \frac{3}{5}, b = -\frac{2}{5}$; **c)** $a = \frac{1}{5}, b = \frac{3}{5}$;

d) $a = -\frac{3}{5}, b = -\frac{2}{5}$.

4. Se considera funcția $F : \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{1+2x}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Presupunem că F este o primitivă a funcției $f : \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{1+2x}$. Fie $S = 2a - b + 3c$. Atunci:

a) $S = \frac{8}{15}$; **b)** $S = -\frac{3}{15}$; **c)** $S = \frac{2}{15}$; **d)** $S = \frac{15}{2}$.

5. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1), & x > 0 \\ xe^{2x}, & x \leq 0 \end{cases}$. O primitivă a funcției f este

funcția F definită prin:

a) $F(x) = \begin{cases} x \ln(x^2 + 1) - 2x, & x > 0 \\ \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + \frac{1}{2}, & x \leq 0 \end{cases};$

b) $F(x) = \begin{cases} x \ln(x^2 + 1) - 2 \arctg x + 1, & x > 0 \\ \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2}, & x \leq 0 \end{cases};$

c) $F(x) = \begin{cases} x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctg x + \frac{1}{4}, & x > 0 \\ \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + \frac{1}{2}, & x \leq 0 \end{cases};$

d) $F(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1) \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) + 2x, & x > 0 \\ \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{3}{2}, & x \leq 0 \end{cases}.$

6. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $f'(x) = 2x + 5, \forall x \in \mathbb{R}$ și $f(0) = 2025$. Atunci $f(1)$ este egal cu:

a) 2031; **b)** 2025; **c)** 2024; **d)** 2029.

7. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2025} \sin(\cos x)$, $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o primitivă a sa și $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = F^2(x)$. Atunci $G'(0)$ este egal cu:

a) $\frac{1}{2024}$; b) 0; c) $\frac{2025}{2024}$; d) 2.

8. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \cos \frac{\pi \sqrt{x^2 + 1}}{2}$. Considerăm $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o primitivă a sa și $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = F^{2025}(x)$. Atunci $\lim_{x \rightarrow 0} G'(x)$ este egală cu:

a) 2025; b) 1; c) ∞ ; d) 0.

9. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^{2024} e^{-x^2}$. Considerăm $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o primitivă a sa care satisface $F(0) = 0$. Atunci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2025}}$ este egală cu:

a) 1; b) $\frac{1}{2025}$; c) ∞ ; d) 0.

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \cos x, & x < 0 \\ e^x & x \geq 0 \end{cases}$. O primitivă a acestei funcții este:

a) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \sin x, & x \leq 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$; b) $F(x) = \begin{cases} 2x + 1 - \sin x, & x \leq 0 \\ e^x + 1, & x > 0 \end{cases}$;

c) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \sin x, & x \leq 0 \\ e^x - 1, & x > 0 \end{cases}$; d) f nu are primitive.

11. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x \frac{t+2}{t^2+2t+2} dt$. Valoarea $f(1)$ este egală cu:

a) $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} + \arctg \frac{1}{3}$; b) $-\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} + \arctg \frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} - \arctg \frac{1}{5}$; d) $\ln 2 - \frac{\pi}{4}$.

12. Valoarea integralei $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ este:

- a)** $-e^{\frac{1}{x}} + C$; **b)** $\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} + C$; **c)** $-e^x + C$; **d)** $\frac{1}{x e^x} + C$.

13. Valoarea integralei $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ este:

- a)** $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$; **b)** $\sqrt{x^2+1} + C$; **c)** $\ln(x - \sqrt{x^2+1}) + C$;
d) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

14. Valoarea integralei $\int \frac{e^{3x}}{e^x+1} dx$ este:

- a)** $\frac{e^{3x}}{2} - \ln(e^x+1) + C$; **b)** $e^{-2x} - 1 - \ln(e^x+1) + C$; **c)** $\ln \frac{e^{2x}}{e^x+1} + C$;
d) $\frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln(e^x+1) + C$.

15. Valoarea integralei $I = \int \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx$, $x > -1$ este:

- a)** $\frac{1}{x^2} - \sqrt{x+1} + C$; **b)** $\ln|x| - \ln\sqrt{x+1} + C$; **c)** $\ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$;
d) $\frac{\sqrt{x+1}}{x} + C$.

16. Mulțimea $\int x\sqrt{(x-1)^3} dx$, $x > 1$ este:

- a)** $F(x) = \frac{2}{35}(5x+2)(x-1)^{\frac{5}{2}} + C$; **b)** $F(x) = \frac{2}{7}(5x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + C$;
c) $F(x) = \frac{7}{2}(5x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{5}{2}(x-1)^{\frac{5}{2}} + C$;
d) $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sqrt{x-1} + \frac{3}{2}\sqrt{(x-1)^3} + C$.

17. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $a \in \mathbb{R}$. Valoarea parametrului real a pentru care $\int_0^2 f(x) dx - \int_{-2}^0 f(x) dx = 2$ este:
- a) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; b) $-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$; c) $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$; d) 0.

18. Valoarea integralei $I = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) dx$ este:

- a) $I = \frac{3}{2} + \ln 2$; b) $I = \frac{2}{3} + \ln 2$; c) $I = -\frac{3}{2} + \ln 2$; d) $I = 3 - \ln 2$.

19. Fie $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(x+1)$. Valoarea integralei $I = \int_0^1 f(x) dx$

- a) $I = \frac{3}{2} - \ln \frac{1}{3}$; b) $I = \frac{2}{3} + \ln 2$; c) $I = \frac{3}{2} - \ln 4$; d) $I = 4 - \ln 2$.

20. Valoarea integralei $I = \int_0^1 2025^x dx$ este

- a) $I = \frac{2024}{\ln 2025}$; b) $I = 2026 \ln 2025$; c) $I = \frac{1}{2025}$; d) $I = \frac{2025^2}{2024}$.

21. Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$. Dacă

$$I = \int_0^1 \frac{f(e^x)}{f(e^{-x})} dx, \text{ atunci:}$$

- a) $I = \frac{e-1}{2e}$; b) $I = \frac{e^2-1}{2}$; c) $I = \frac{(e-1)^2}{2}$; d) $I = \frac{2e}{e-1}$.

22. Valoarea integralei $\int_0^2 \max \left\{ x, \frac{2}{1+x^2} \right\} dx$ este:

a) 3; **b)** $\frac{\pi}{4} + 1$; **c)** $\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}$; **d)** $\pi + \frac{1}{2}$.

23. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^{2025} + (x-1)^{2025}$. Valoarea integralei $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$, este:

a) $I = \frac{2^{2025}}{2025}$; **b)** $I = \frac{2^{2025}}{1013}$; **c)** $I = 0$; **d)** $I = 2^{2026}$.

24. Valoarea integralei $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 - \sin x}$ este:

a) $\frac{2\pi}{\sqrt{15}}$; **b)** $\frac{\pi}{\sqrt{15}}$; **c)** 1; **d)** 0; **e)** $\frac{3\pi}{\sqrt{15}}$.

25. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Fie $S = a - b + c$. Valoarea lui S pentru care $f(0) = 1$, $f'(1) = 9$, $\int_0^1 f(x) dx = 3$ este:

a) $S = 6$; **b)** $S = 0$; **c)** $S = -7$; **d)** $S = -3$.

26. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2025} + \int_0^{x^{2025}} e^{-t^2} dt$. Valoarea lui $f'(1)$ este:

a) $I = 2025 + \frac{1}{e}$; **b)** $I = 2025 \cdot \left(1 + \frac{1}{e}\right)$; **c)** $I = 2024 + \frac{1}{e}$; **d)** $I = \frac{2025}{e}$.

27. Valoarea integralei $\int_0^1 \left| x^2 - \frac{1}{4} \right| dx$ este:

a) $\frac{1}{2}$; **b)** 1; **c)** $\frac{1}{4}$; **d)** $\frac{3}{4}$.

28. Valoarea integralei $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx$ este:

a) 1; **b)** $\frac{1}{3} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$; **c)** $\frac{1}{2} \left(\frac{5\pi}{18} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \right)$; **d)** $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{15} - \frac{1}{2} \right)$.

29. Valoarea integralei $\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} dx$ este:

a) $\frac{\pi}{2} + 1$; **b)** 2; **c)** $\frac{\pi}{2} - 1$; **d)** 1.

30. Valoarea integralei $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{2-x}} dx$ este:

a) $\frac{\pi}{2} + 1$; **b)** 2; **c)** $\frac{\pi}{2}$; **d)** 1.

31. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ două numere strict pozitive astfel încât $a + b = 3$ și $\int_{-1}^{\frac{b}{a}} \sqrt{x+1} dx = 2\sqrt{3}$. Fie $T = 2a + 5b$. Atunci:

a) $T = 9$; **b)** $T = 12$; **c)** $T = 20$; **d)** $T = 7$.

32. Fie funcția $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-x}, & x \in [0, 1] \\ \frac{x+1}{2}, & x \in (1, 3] \end{cases}$. Valoarea

integralei $\int_0^3 f^2(x) dx$ este:

a) $\frac{15}{8}$; **b)** 1; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** $\frac{29}{6}$.

33. Valoarea integralei $\int_{-1}^1 (x+1)e^{-|x|} dx$ este:

a) $2 \left(1 - \frac{1}{e} \right)$; **b)** 2; **c)** $\frac{1}{e}$; **d)** 0.

34. Fie $a \in \mathbb{R}, a > 0$ și funcția $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_a(x) = \frac{1}{|x-a|+3}$. Valoarea limitei $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^3 f_a(x) dx$ este:

a) $\frac{1}{2}$; **b)** 0; **c)** $\frac{1}{4}$; **d)** 1.

35. Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ este:

a) $8 - 2\sqrt{e} - \frac{6}{\sqrt{e}}$; **b)** $2\sqrt{e} + \frac{6}{\sqrt{e}}$; **c)** $8 + 2\sqrt{e} + \frac{6}{\sqrt{e}}$; **d)** $8 - \sqrt{e} - \frac{3}{\sqrt{e}}$.

36. Aria delimitată de axa Ox și graficul funcției $f : (-4, 0) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x + |x^2 - 4|}{|x - 2|}$ este:

a) 1; **b)** $4 + \ln \frac{3}{4}$; **c)** $5 + \ln \frac{3}{4}$; **d)** $5 + 6 \ln \frac{3}{4}$.

37. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 9 - x^2$. Se notează cu S aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f și axa Ox . Valoarea lui S este:

a) 27; **b)** 15; **c)** 10; **d)** 36.

38. Aria mulțimii cuprinsă între graficul funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arctg\left(\frac{1}{x}\right)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = \sqrt{3}$ are valoarea:

a) $\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 2$; **b)** $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \ln 2$; **c)** $\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} + \ln 3$;
d) $-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

39. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$. Aria domeniului plan mărginit de graficul funcției, axa Ox și dreptele de ecuație $x = 2$ și $x = 3$ este

a) $\frac{1}{2} - \ln 2$; b) 1; c) $\ln 4 - \frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{2} + \ln 2$.

40. Fie $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot e^{x^2}, g(x) = e \cdot x$. Aria mulțimii cuprinsă între graficele funcțiilor f și g este:

a) $\frac{1}{2}$; b) e ; c) $\frac{1}{e}$; d) 1.

41. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x+6}$. Volumul corpului de rotație obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) - \frac{1}{x+3}$ este:

a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{1}{3}$.

42. Volumul corpului obținut prin rotirea arcului de cerc $x^2 + y^2 = 4$, situat deasupra axei Ox , în jurul acestei axe, este:

a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{10\pi}{3}$; c) $\frac{32\pi}{3}$; d) $\frac{3\pi}{4}$.

43. Volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x+1)}}{x}$ este:

a) $\pi \ln \frac{8}{3\sqrt{3}}$; b) $\pi \ln \frac{2}{3}$; c) 2π ; d) $\frac{3\pi}{4}$.

44. Volumul corpului de rotație determinat de funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot e^x$ este:

a) $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$; b) $\frac{\pi}{4}(e + 1)$; c) $\frac{e\pi}{2}$; d) π .

45. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$ este:

a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) 0; d) $\frac{1}{3}$.

46. Valoarea limitei șirului de termen general $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}$ este:

a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{1}{2}$; d) 1.

47. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x$. Valoarea limitei șirului de termen general $a_n = \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right)$ este:

a) $\frac{\ln 2}{4} - \frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$; d) $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$.

48. Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x}$. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) dx$ este:

a) 2; b) 1; c) 6; d) 0.

49. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} e^{\frac{k^2}{n^2}}$ este:

a) $\frac{1}{2}(e - 1)$; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) e .

50. Aria mulțimii cuprinsă între parabolele de ecuație $y^2 = x$ și $x^2 = 8y$ este egală cu:

a) $\frac{8}{3}$; b) $\frac{32\sqrt{2}}{3} - \frac{8}{3}$; c) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{3} + 1$.

SOLUȚII
ANALIZĂ MATEMATICĂ
Integrabilitate

1. Condițiile de continuitate și derivabilitate ale funcției F în $x = e$ conduc

la sistemul $\begin{cases} ae + b = 1 \\ a = \frac{3}{e} \end{cases}$. Rezultă că $P = -\frac{6}{e}$.

Răspunsul corect este c).

2. Derivata funcției F este

$$F'(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{2bx}{x^2+1} + \frac{c}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1) + (2bx+c)(x+1)}{(x^2+1)(x+1)}.$$

Impunând condiția ca F să fie o primitivă a funcției f , rezultă că $F'(x) = f(x)$,
deci $a(x^2+1) + (2bx+c)(x+1) = 2x$.

Se obține sistemul $\begin{cases} a + 2b = 0, \\ 2b + c = 2, \\ a + c = 0, \end{cases}$ a cărei soluție este $a = -1, b = \frac{1}{2}, c = 1$.

Răspunsul corect este c).

3. Funcția F este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Din condiția $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că:

$$\begin{aligned} -e^{-x}(a \sin(2x) + b \cos(2x)) + e^x(-2b \sin(2x) + 2a \cos(2x)) = \\ e^{-x}(\sin(2x) + \cos(2x)) \end{aligned}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci,

$$\sin(2x) + \cos(2x) = (-a - 2b)\sin(2x) + (-b + 2a)\cos(2x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rezolvând sistemul $\begin{cases} -b + 2a = 1 \\ -a - 2b = 1 \end{cases}$, obținem $a = \frac{1}{5}, b = -\frac{3}{5}$.

Răspunsul corect este a).

4. Funcția F este derivabilă pe $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$. Din condiția $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$, rezultă că

$$(2ax + b) \cdot \sqrt{1 + 2x} + (ax^2 + bx + c) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 2x}} = x \cdot \sqrt{1 + 2x}, \quad (\forall) x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 + 2x) \cdot (2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x \cdot (1 + 2x), \quad (\forall) x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5a - 2) \cdot x^2 + (2a + 3b - 1) \cdot x + b + c = 0, \quad (\forall) x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right).$$

Rezolvând sistemul
$$\begin{cases} 5a - 2 = 0 \\ 2a + 3b - 1 = 0, \\ b + c = 0 \end{cases}$$
 obținem $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{15}$, $c = -\frac{1}{15}$.

Prin urmare $2a - b + 3c = \frac{8}{15}$.

Răspunsul corect este **a**).

5. Deoarece

$$\int \ln(x^2 + 1) dx = x \cdot \ln(x^2 + 1) - \int \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx = x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C_1,$$

$$\int x \cdot e^{2x} dx = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C_2,$$

o primitivă F a lui f va fi de forma

$$F(x) = \begin{cases} x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C_1, & \text{pentru } x > 0 \\ \frac{x \cdot e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C_2, & \text{pentru } x \leq 0 \end{cases}.$$

Punând condiția ca F să fie continuă în 0, se obține relația $C_1 = C_2 - \frac{1}{4}$.

Pentru $C_2 = \frac{1}{2}$ se obține $C_1 = \frac{1}{4}$.

Răspunsul corect este **c**).

6. Avem

$$f(x) = \int (2x + 5)dx = x^2 + 5x + C.$$

Cum $f(0) = 2025$, rezultă că $C = 2025$. Prin urmare $f(1) = 2031$.

Răspunsul corect este a).

7. Deoarece F este o primitivă a lui f , avem $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Prin urmare $F'(0) = f(0) = 0$. Cum $G'(x) = 2F(x) \cdot F'(x)$, rezultă că $G'(x) = 0$.

Răspunsul corect este b).

8. Deoarece F este o primitivă a lui f , avem $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Rezultă că

$$G'(x) = 2025 \cdot F^{2024}(x) \cdot F'(x) = 2025 \cdot F^{2024}(x) \cdot f(x).$$

Prin urmare,

$$\lim_{x \rightarrow 0} G'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2025 \cdot F^{2024}(x) \cdot f(x) = 0.$$

Răspunsul corect este d).

9. Avem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2025}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{2025x^{2024}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2024}e^{-x^2}}{2025x^{2024}} = \frac{1}{2025}.$$

Răspunsul corect este b).

10. Considerăm funcția

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \sin x + C_1, & x < 0. \\ e^x + C_2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Din continuitatea funcției F în 0 rezultă că

$$C_1 = \lim_{x \rightarrow 0, x \leq 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} F(x) = C_2 + 1.$$

Dacă $C_1 = 0$, atunci $C_2 = -1$, deci funcția

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \sin x, & x < 0. \\ e^x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

este o primitivă a lui f .

Răspunsul corect este c).

11. Funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x+2}{x^2+2x+2}$ este continuă, deci, admite primitive pe $\mathbb{R}$. O primitivă G a ei va fi funcția

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arctg}(x+1). \end{aligned}$$

Rezultă că $f(x) = G(x) - G(0)$, deci $f(1) = G(1) - G(0) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

Răspunsul corect este a).

12. Avem

$$I = - \int \left(\frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} \right)' dx = - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} + C.$$

Răspunsul corect este a).

13. Avem

$$I = \int (\sqrt{x^2+1})' dx = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Răspunsul corect este b).

14. Efectuând substituția $e^x = t$, integrala devine

$$\int \frac{t^2}{t+1} dt = \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| + C.$$

Revenind la vechea notație, rezultă că

$$I = \frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln(e^x + 1) + C.$$

Răspunsul corect este d).

15. Efectuând substituția $x = t^2 - 1$ se calculează integrala

$$\int \frac{2t}{t(t^2 - 1)} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C.$$

Astfel, valoarea integralei va fi

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C, \quad \forall x > -1.$$

Răspunsul corect este **c**).

16. Avem

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{(x-1)^3} dx &= \int (x-1) \sqrt{(x-1)^3} dx + \int \sqrt{(x-1)^3} dx = \\ &= \int (x-1)^{\frac{5}{2}} dx + \int (x-1)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{7} (x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} + C = \\ &= 2(x-1)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{7} (x-1) + \frac{1}{5} \right) + C = \frac{2}{35} (5x+2) (x-1)^{\frac{5}{2}} + C. \end{aligned}$$

Răspunsul corect este **a**).

17. Deoarece

$$\int_0^2 \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}} dx - \int_{-2}^0 \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^2 \frac{2ax}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = 2a \sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^2 = 2a(\sqrt{5} - 1) = 2,$$

$$\text{rezultă că } a = \frac{1}{1 - \sqrt{5}} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Răspunsul corect este **b**).

18. Avem

$$I = \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 + \ln x \Big|_1^2 = \frac{3}{2} + \ln 2.$$

Răspunsul corect este **a**).

19. Avem

$$I = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - x \ln(x+1) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \frac{3}{2} - \ln 4.$$

Răspunsul corect este **c**).

20. Avem

$$I = \frac{2025^x}{\ln 2025} \Big|_0^1 = \frac{2024}{\ln 2025}.$$

Răspunsul corect este **a**).

21. Avem

$$I = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^{-x}} dx = \int_0^1 (e^{2x} - e^x) dx = \frac{(e - 1)^2}{2}.$$

Răspunsul corect este **c**).

$$22. \text{ Se constată imediat că } \max \left\{ x, \frac{2}{1+x^2} \right\} = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & x \in [0, 1] \\ x, & x \in (1, 2] \end{cases}.$$

Funcția $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \max \left\{ x, \frac{2}{1+x^2} \right\}$ este continuă, deci este integrabilă

pe $[0, 2]$. Avem

$$\int_0^2 \max \left\{ x, \frac{2}{1+x^2} \right\} dx = \int_0^1 \frac{2}{1+x^2} dx + \int_1^2 x dx = 2 \arctan x \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}.$$

Răspunsul corect este **c**).

23. Avem

$$I = \frac{(x+1)^{2026}}{2026} \Big|_{-1}^1 + \frac{(x-1)^{2026}}{2026} \Big|_{-1}^1 = 0.$$

Răspunsul corect este **c**).

24. Funcția $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4 - \sin x}$ este continuă, deci integrabilă pe $[0, \pi]$. Determinăm o primitivă a ei pe intervalul $[0, \pi]$ folosind schimbarea de variabilă $x = 2 \cdot \arctg t$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4 - \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt &= \int \frac{2dt}{4 + 4t^2 - 2t} = \int \frac{dt}{2t^2 - t + 2} = \int \frac{dt}{2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + 2 - \frac{1}{8}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}} = \frac{2}{\sqrt{15}} \cdot \arctg\left(\frac{4}{\sqrt{15}}\left(t - \frac{1}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

Rezultă că

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{15}} \cdot \arctg\left(\frac{4}{\sqrt{15}}\left(\tg\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{4}\right)\right), & \text{pentru } x \in [0, \pi) \\ C_1, & \text{pentru } x = \pi \\ \frac{2}{\sqrt{15}} \cdot \arctg\left(\frac{4}{\sqrt{15}}\left(\tg\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{4}\right)\right) + C_2, & \text{pentru } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}.$$

$$\text{Din } \frac{2}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\pi}{2} = C_1 = -\frac{2}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\pi}{2} + C_2 \Rightarrow C_1 = \frac{\pi}{\sqrt{15}}, \quad C_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{15}}, \text{ deci}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 - \sin x} = F(2\pi) - F(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{15}}.$$

Răspunsul corect este **a**).

$$25. \text{ Se obțin relațiile } c = 1; 3a + b = 9; \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 3,$$

din care rezultă că $a = 2, b = 3, c = 1$, deci $S = 0$.

Răspunsul corect este **b**).

26. Avem

$$f'(x) = 2025 \cdot x^{2024} + e^{-\left(x^{2025}\right)^2} \cdot 2025 \cdot x^{2024}.$$

$$\text{Prin urmare } f'(1) = 2025 \cdot \left(1 + \frac{1}{e}\right). \quad f'(x) = 2025 \left(1 + \frac{1}{e}\right).$$

Răspunsul corect este **b**).

27. Explicitând funcția modul se obține

$$\int_0^1 \left| x^2 - \frac{1}{4} \right| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-x^2 + \frac{1}{4} \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x}{4} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x}{4} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{4}.$$

Răspunsul corect este c).

28. Avem

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 x \operatorname{arctg} x dx &= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 - \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} x \right) \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{5\pi}{18} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Răspunsul corect este c).

29. Se obține succesiv:

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{(x-1)(3-x)}} dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{1-(x-2)^2}} dx = -\sqrt{1-(x-2)^2} \Big|_1^2 +$$

$$\arcsin(x-2) \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} - 1$$

Răspunsul corect este c).

30. Se calculează $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{2-x}} dx$. Efectuând schimbarea de variabilă

$t = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ și împărțind apoi în fracții simple, se obține

$$\int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{-4t}{(t^2+1)^2} dt = \int \frac{1}{1+t} dt + \int \frac{-t+1}{t^2+1} dt + \int \frac{-2t-2}{(t^2+1)^2} dt = \ln \frac{|t+1|}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{t-1}{t^2+1}.$$

Prin urmare, funcția

$$F(x) = \begin{cases} \ln \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2}} + \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2-x}) \cdot \sqrt{x}}{2}, & x \in (0, 2] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este o primitivă a lui f . Atunci $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{2-x}} dx = F(2) - F(0) = 1$.

Răspunsul corect este d).

31. Avem

$$\int_{-1}^{\frac{b}{a}} \sqrt{x+1} dx = \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = 3.$$

Prin urmare $a + b = 3$ și $1 + \frac{b}{a} = 3$, de unde $a = 1$ și $b = 2$.

Rezultă că $T = 12$.

Răspunsul corect este b).

32. Avem

$$f^2(x) = \begin{cases} 2 - x - 2\sqrt{1-x}, & x \in [0, 1] \\ \left(\frac{x+1}{2}\right)^2, & x \in (1, 3] \end{cases}.$$

Rezultă că:

$$\begin{aligned} \int_0^3 f^2(x) dx &= \int_0^1 (2 - x - 2\sqrt{1-x}) dx + \int_1^3 \frac{(x+1)^2}{4} dx = \\ &= \left(2x - \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right) \Big|_0^1 + \frac{(x+1)^3}{12} \Big|_1^3 = \frac{29}{6}. \end{aligned}$$

Răspunsul corect este d).

33. Aplicând formula de integrare prin părți se obține:

$$\int_{-1}^1 (x+1)e^{-|x|} dx = \int_{-1}^0 (x+1)e^x dx + \int_0^1 (x+1)e^{-x} dx = 2 \left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

Răspunsul corect este a).

34. Avem

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^3 f_a(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^3 \frac{1}{a+3-x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} (-\ln(a+3-x)) \Big|_0^3 = \lim_{a \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{a+3}{a}\right) = 0$$

Răspunsul corect este b).

35. Aria A a domeniului este egală cu:

$$A = \int_{\frac{1}{e}}^e \left| \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right| dx = - \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = -2\sqrt{x} \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + 4\sqrt{x} \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^e - 4\sqrt{x} \Big|_1^e = 8 - 2\sqrt{e} - \frac{6}{\sqrt{e}}.$$

Răspunsul corect este **a**).

36. Explicând funcția modul se obține

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 4}{-x + 2}, & \text{pentru } x \in [-4, -2) \\ \frac{-x^2 + 3x + 4}{-x + 2}, & \text{pentru } x \in [-2, 0] \end{cases}.$$

Se constată că $f(x) \leq 0$ dacă $x \in [-4, -1]$ și $f(x) \geq 0$ dacă $x \in [-1, 0]$.

Aria domeniului este:

$$\begin{aligned} & - \int_{-4}^{-2} \frac{x^2 + 3x - 4}{-x + 2} dx - \int_{-2}^{-1} \frac{-x^2 + 3x + 4}{-x + 2} dx + \int_{-1}^0 \frac{-x^2 + 3x + 4}{-x + 2} dx = \\ & = - \int_{-4}^{-2} \left(x + 5 + \frac{6}{x - 2} \right) dx - \int_{-2}^{-1} \left(x - 1 - \frac{6}{x - 2} \right) dx + \int_{-1}^0 \left(x - 1 - \frac{6}{x - 2} \right) dx = 5 + 6 \ln \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Răspunsul corect este **d**).

37. Aria domeniului este:

$$A = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = 36.$$

Răspunsul corect este **d**).

38. Aria A a mulțimii situată între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=\sqrt{3}$ are valoarea

$$A = \int_1^{\sqrt{3}} \arctg \frac{1}{x} dx = x \cdot \arctg \frac{1}{x} \Big|_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

Răspunsul corect este **b**).

39. Aria A a mulțimii mărginite de curbe este

$$A = \int_2^3 \frac{x}{(x-1)^2} dx = \int_2^3 \frac{x-1}{(x-1)^2} dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-1)^2} dx = \left(\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} \right) \Big|_2^3 = \frac{1+2\ln 2}{2}$$

Răspunsul corect este **d**).

40. Fie S aria mulțimii cuprinse între graficele funcțiilor f și g . Atunci:

$$S = \int_0^1 |xe^{x^2} - ex| dx = \int_0^1 (-xe^{x^2} + ex) dx = e \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{e^{x^2}}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Răspunsul corect este **a**).

41. Volumul este corpului de rotație este

$$V = \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Răspunsul corect este **c**).

42. Volumul corpului de rotație C este

$$\text{vol}(C) = \int_{-2}^2 \pi(4-x^2) dx = 2 \int_0^2 \pi(4-x^2) dx = 2\pi \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{3}.$$

Răspunsul corect este **c**).

43. Volumul căutat este

$$V = \pi \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx = \pi \left(-\frac{1}{x} \ln(x+1) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx \right) = \pi \left(\ln \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln \frac{x}{x+1} \Big|_1^2 \right)$$

$$V = \pi \frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

Răspunsul corect este **a**).

44. Volumul V al corpului de rotație este:

$$V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \frac{\pi}{8} \int_0^2 t^2 e^t dt = \frac{\pi}{8} (t^2 e^t - 2te^t + 2e^t) \Big|_0^2 = \frac{\pi}{8} (e^2 - 1).$$

Răspunsul corect este **a**).

45. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x^2$, este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive pe $\mathbb{R}$. Fie funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o primitivă a ei. Atunci

$$\int_0^x \sin^2 t dt = F(x) - F(0).$$

Pe de altă parte, $0 \leq \left| \int_0^x \sin t^2 dt \right| \leq \int_0^x dt = x$. Din inegalitatea cleștelui, rezultă că

$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x \sin t^2 dt = 0$. Utilizând regula lui l'Hospital, obținem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

Răspunsul corect este **d**).

46. Deoarece $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2 + n^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$ rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2 + n^2} = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Răspunsul corect este **b**).

47. Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \arctg x dx = (x \cdot \arctg x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Răspunsul corect este **c**).

48. Folosind formula de integrare prin părți se obține

$$\int_0^n x e^{-x} dx = -(x+1)e^{-x} \Big|_0^n = 1 - (n+1)e^{-n}.$$

Rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) dx = 1$.

Răspunsul corect este c).

49. Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} e^{\frac{k^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{\frac{k^2}{n^2}} = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

Răspunsul corect este a).

50. Fie A aria mulțimii cuprinse între cele două parabole. Atunci

$$A = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x^2}{8} \right) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 - \frac{1}{24} x^3 \Big|_0^4 = \frac{8}{3}.$$

Răspunsul corect este a).

BIBLIOGRAFIE

1. BECHEANU M., GRIGORE G., IANUȘ S., ICHIM I. – *Probleme de algebră, analiză matematică și geometrie*, Ed. Cartea Românească, 1991.
2. GEORGESCU-BUZĂU E., ONOFRAȘ E. – *Metode de rezolvare a problemelor de matematică în liceu*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
3. *Ghid de pregătire pentru bacalaureat – Matematică M1*, Ed. Sigma 2012.
4. ION D.I., RADU N., NIȚĂ C., POPESCU D. – *Probleme de algebră*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1981.
5. *Manuale alternative aprobate de MEdC pentru clasele IX – XII*.
6. MATTHEWS K.R. – *Elementary Linear Algebra*, Department of Mathematics, University of Queensland, 1998.
7. NĂSTĂSESCU C., NIȚĂ C., BRANDIBURU M., JOIȚA D. – *Exerciții și probleme de algebră*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1981.
8. NĂSTĂSESCU C., NIȚĂ C., BRANDIBURU M., JOIȚA D. – *Exerciții și probleme de algebră pentru clasele IX – XII*, Ed. Rotech Pro 2004.
9. SOUZA P.N., SILVA J.N. – *Berkely Problems in Mathematics*, Ed. Springer, 1998.
10. *Teste grilă de matematică*, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca U.T. Press, 2017.
11. *Teste grilă de matematică pentru examenul de bacalaureat și admiterea în învățământul superior la Universitatea Politehnică Timișoara*, 2013.
12. *Teste de matematică*, Universitatea Politehnică, București, 2016.