Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică M_şt-nat

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

Subiectul I **(30 de puncte)**

1.	Calcul $a^2=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2-2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$	**3p**
	Finalizare $a^2=4-2\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=4-2=2\in\mathbb{N}$	**2p**
2.	$x_V=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2m}=\frac{-2}{m}$, $y_V=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(16+24m)}{4m}=-\frac{4+6m}{m}$, $m\neq 0$	**3p**
	$2=4+6m\Leftrightarrow 6m=-2\Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}$	**2p**
3.	Condiţii de existenţă : $\begin{cases}1+x\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[-1,\infty)\\ x\in[0,\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-1,\infty)\cap[0,\infty)\Leftrightarrow x\in[0,\infty)$.	**1p**
	Se ridică la puterea a doua și avem $\left(\sqrt{1+x}\right)^2=\left(2\sqrt{3}x\right)^2$. Se obține ecuația de grad doi	**1p**
	$12x^2-x-1=0$ cu soluțiile $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-\frac{1}{4}$. Soluția ecuației este doar $x_1=\frac{1}{3}$.	**3p**
	Se poate renunța la condiții de existență cu obligativitatea verificării soluțiilor.	
4.	Numărul total de cazuri este 90	**2p**
	Calcul nr cazuri favorabile : din cele 90 numere de 2 cifre scădem numărul de numere cu ambele cifre impare care sunt 5·5=25 și pe cele cu ambele cifre pare care sunt 4·5=20	**2p**
	$P=\frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr total cazuri}}=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	ABCD paralelogram înseamnă că punctul M mijlocul diagonalei AC este în același timp și mijlocul diagonalei BD. Punctul M are coordonatele	**2p**
	$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{2+0}{2}=1$, $y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{-1+3}{2}=1$. Pe de altă parte	**1p**
	$x_M=\frac{x_B+x_D}{2}=1$, $y_M=\frac{y_B+y_D}{2}=1$. Se obține punctul $D(4,2)$. Atunci $\overrightarrow{OD}=4\vec{i}+2\vec{j}$	**1p**
	Finalizarea cu $\left\|\overrightarrow{OD}\right\|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$	**1p**

6.	$\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}$	**2p**
	$\sin 3x+\sin 2x=\sin\pi+\sin\dfrac{2\pi}{3}=0+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**

Subiectul II **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A(-1)=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -4 & -1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$(-1)(-1)-4(-4)=1+16=17$	**3p**
b)	Calculul $A(2023-a)+A(2023+a)$	**3p**
	Calcul $2A(2023)$ cu finalizare	**2p**
c)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}x & 4\\ -4 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & 4\\ -4 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xy-16 & 4(x+y)\\ -4(x+y) & xy-16\end{pmatrix}$	**2p**
	$2A(-8)=2\begin{pmatrix}-8 & 4\\ -4 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & 8\\ -8 & -16\end{pmatrix}$. Se egalează cele două matrici și se obține sistemul	**1p**
	$\begin{cases}x+y=2\\ xy=0\end{cases}$, de unde se obțin perechile $(0,2),\ (2,0)$.	**2p**
2.a)	$x*0=x$	**2p**
	$0*x=x$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	$x*x=\dfrac{8x}{4+x^2}$. Se obține ecuația $\dfrac{8x}{4+x^2}=\dfrac{8}{5}$, de unde $x^2+4=5x\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$	**3p**
	Ecuația are soluțiile 1 și 4, dar numai $x=1$ este din G	**2p**
c)	$f(x)*f(y)=\dfrac{4\left(f(x)+f(y)\right)}{4+f(x)f(y)}=\dfrac{8\left(\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{y-1}{y+1}\right)}{4+4\dfrac{x-1}{x+1}\dfrac{y-1}{y+1}}=2\dfrac{(x-1)(y+1)+(y-1)(x+1)}{(x+1)(y+1)+(y-1)(x-1)}=$	**3p**
	$=\dfrac{2(xy-1)}{xy+1}=f(xy)$	**2p**

Subiectul III **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$. Se calculează derivata funcției f	**2p**
	$f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'\ln x+\sqrt{x}(\ln x)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}$,	**2p**
	iar valoarea limitei este $f'(1)=1$	**1p**
b)	Ecuația tangentei într-un punct $(x_0,f(x_0))\in G_f$ are forma $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$	**1p**
	Rezolvare ecuație $f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x}\ln x=0\Leftrightarrow\ln x=0\Leftrightarrow x=1$.	**2p**

c)	Aplicarea pentru $x_0 = 1$ și avem $y = x - 1$	**2p**
	$f'(x) = \frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-2}$ și avem f este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{1}{e^2}\right)$ și	**1p**
	este strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{e^2}, \infty\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\frac{1}{2}$	**2p**
	$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \ln 3 > \frac{1}{\sqrt{2}} \ln 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sqrt{2} \ln 3 > \sqrt{3} \ln 2 \Leftrightarrow \ln 3^{\sqrt{2}} > \ln 2^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}}$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 \left(x^2 - 4x + 6\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x\right)\Big|_0^1 = \frac{13}{3}$	**5p**
b)	Schimbarea de variabilă $\sqrt{x^2 - 4x + 6} = t$, de unde $\frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 6}}dx = dt$	**3p**
	Se obține $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} dt = \sqrt{2} - \sqrt{3}$	**2p**
c)	$f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 6}} \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ f este descrescătoare pe intervalul $[1,2]$ și avem	**3p**
	$f(2) \le f(x) \le f(1), \forall x \in [1,2]$ de unde prin integrare se obține $\int_1^2 \sqrt{2}dx \le \int_1^2 f(x)dx \le \int_1^2 \sqrt{3}dx$	**2p**
	$\sqrt{2} \le \int_1^2 f(x)dx \le \sqrt{3}$	