

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 16 martie 2019

Subiecte CLASA a XI-a

Problema 1. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale strict pozitive, cu proprietatea că șirul $(a_{n+1} - a_n)_{n \geq 1}$ este convergent, cu limita nenulă. Calculați limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, și $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Arătați că există un număr complex z , cu $|z| = 1$, având proprietatea că

$$\operatorname{Re}(\det(A + zB)) \geq \det(A) + \det(B),$$

unde $\operatorname{Re}(w)$, reprezintă partea reală a numărului complex w .

Problema 3. Fie n un număr natural impar și matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $(A - B)^2 = O_n$. Arătați că $\det(AB - BA) = 0$.

Problema 4. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție continuă, cu $f(0) > 0$ și cu proprietatea că pentru orice $0 \leq x < y$ au loc inegalitățile $x - y < f(y) - f(x) \leq 0$. Arătați că:

a) Există un unic număr $\alpha \in (0, \infty)$ cu proprietatea că $(f \circ f)(\alpha) = \alpha$.

b) Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin $x_1 \geq 0$ și $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este convergent.