

Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Societatea de Științe Matematice din România

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2011. március 12.

VIII. OSZTÁLY

1. feladat. a) Bizonyítsd be, hogy $3a^2 - 2a + 3 \geq \frac{8}{3}$, bármely a valós szám esetén!

b) Határozd meg azokat az x és y valós számokat, amelyekre

$$(x^2 - x + 1)(3y^2 - 2y + 3) - 2 = 0.$$

2. feladat. a) Igazold, hogy bármely nullától különböző m természetes szám esetén az $m^2 - m + 1$ szám eleme az $\{n^2 + n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaznak!

b) Adott a $p > 1$ négyzetszám. Bizonyítsd be, hogy léteznek olyan r és q nullától különböző természetes számok, amelyekre

$$p^2 + p + 1 = (r^2 + r + 1)(q^2 + q + 1).$$

3. feladat. Az $ABCA'B'C'$ egyenes hasáb alapjai egyenlő oldalú háromszögek. Egy A ponton átmenő α sík a (BB') és (CC') félegyeneseket az E illetve F pontokban metszi úgy, hogy $T_{ABE\Delta} + T_{ACF\Delta} = T_{AEF\Delta}$. Határozd meg az (AEF) és (BCC') síkok által bezárt szög mértékét!

4. feladat. Határozd meg azokat az m természetes számokat, amelyekre:

$$\{\sqrt{m}\} = \{\sqrt{m + 2011}\}.$$

Megjegyzés. $\{x\}$ az x valós szám törtrészét jelöli.

Munkaidő 3 óra + 30 perc kérdésekre.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.