

Clasa a XII-a

1. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că, pentru orice element $x \in R$, există două elemente e_1 și e_2 din R , astfel încât $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ și $x = e_1 e_2$. Arătați că:
 - a) 1 este singurul element inversabil al inelului R ;
 - b) $x^2 = x$, oricare ar fi $x \in R$.
2. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp finit cu cel puțin patru elemente. Arătați că mulțimea K^* poate fi partiționată în două submulțimi nevide A și B , cu proprietatea că

$$\sum_{x \in A} x = \prod_{y \in B} y.$$

3. Fie $\mathcal{C}$ mulțimea funcțiilor $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, de două ori derivabile pe $[0, 1]$, care au cel puțin două zerouri, nu neapărat distincte, în $[0, 1]$ și $|f''(x)| \leq 1$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Determinați valoarea maximă pe care o poate lua integrala

$$\int_0^1 |f(x)| dx,$$

când f parcurge mulțimea $\mathcal{C}$, și funcțiile care realizează acest maximum.

(O funcție derivabilă f are două zerouri într-un același punct a , dacă

$$f(a) = f'(a) = 0)$$

4. Determinați funcțiile polinomiale neconstante $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^*$, cu coeficienți raționali, care au următoarea proprietate: oricare ar fi x în intervalul $[0, 1]$, există două funcții polinomiale $g_x, h_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, cu coeficienți raționali, astfel încât $h_x(x) \neq 0$ și

$$\int_0^x \frac{1}{f(t)} dt = \frac{g_x(x)}{h_x(x)}.$$