

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 18 martie 2017

CLASA a IX-a

Problema 1. Fie A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor triunghiului ascuțitunghic ABC . Pe segmentele B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 se consideră punctele X, Y , respectiv Z , astfel încât

$$\frac{C_1X}{XB_1} = \frac{b \cos C}{c \cos B}, \quad \frac{A_1Y}{YC_1} = \frac{c \cos A}{a \cos C} \text{ și } \frac{B_1Z}{ZA_1} = \frac{a \cos B}{b \cos A}.$$

Arătați că dreptele AX, BY și CZ sunt concurente.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie ABC un triunghi în care O și I sunt respectiv centrul cercului circumscris și centrul cercului înscris. Mediatoarele segmentelor IA, IB, IC se intersectează două câte două formând triunghiul $A_1B_1C_1$. Arătați că

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}.$$

Problema 3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică de numere naturale nenule. Notăm $S_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că:

- a) Dacă p este un număr prim, $p \geq 5$, atunci S_p se divide cu p ;
- b) S_5 nu este pătrat perfect.

Problema 4. Fie a, b, c numere reale pozitive cu proprietatea $ab + bc + ca + abc = 4$. Arătați că

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq 3 \leq a + b + c.$$