



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Națională, Craiova, 11 aprilie 2023

CLASA a IX-a – subiecte

Problema 1. Se consideră ecuația $x^2 + (a + b - 1)x + ab - a - b = 0$, unde a și b sunt numere naturale nenule cu $a \leq b$.

Problema 2. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că

$$f(f(x)) + y \cdot f(x) \leq x + x \cdot f(f(y)),$$

pentru orice x și y numere reale.

Problema 3. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Considerăm un pătrat de latură $2n - 1$ pe care îl împărțim prin paralele la laturi în $(2n - 1)^2$ pătrate unitate. Ana și Bogdan joacă următorul joc: începând cu Ana, cei doi colorează alternativ, Ana cu roșu iar Bogdan cu albastru, în $2n^2$ ture, cele $4n^2$ vârfuri ale pătratelor unitate. Apoi, începând cu Ana, fiecare unește printr-un vector un punct roșu (care va fi originea) cu un punct albastru (care va fi vârful), rezultând astfel $2n^2$ vectori cu originile și vârfurile distincte. Dacă suma acestor vectori este nulă, Ana câștigă. Altfel, câștigă Bogdan.

Arătați că Bogdan are o strategie câștigătoare.

Problema 4. Fie numerele reale $r, s \in [1, \infty)$ cu proprietatea că pentru orice numere naturale nenule a, b , cu a divide b , rezultă $[ar]$ divide $[bs]$.

- Demonstrați că $\frac{s}{r}$ este număr natural.
- Arătați că r și s sunt numere naturale.

Am notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x .