



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureș și Sovata, 20 aprilie 2016
CLASA a 12-a

Subiecte

Problema 1. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există un unic $c_n \in (0, 1)$, astfel încât

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{1}{1+(c_n)^n}$$

și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n(c_n)^n$.

Radu Pop

Problema 2. Fie A un inel și fie D mulțimea elementelor sale neinvertibile. Știind că $a^2 = 0$ oricare ar fi $a \in D$, să se arate că:

- (a) $axa = 0$ oricare ar fi $a \in D$ și $x \in A$;
- (b) dacă D este mulțime finită cu cel puțin două elemente, atunci există $a \in D, a \neq 0$, astfel încât $ab = ba = 0$, oricare ar fi $b \in D$.

Ioan Băetu

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție crescătoare și $a \in \mathbb{R}$. Să se arate că f este continuă în a dacă și numai dacă există un șir $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_n > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât

$$\int_a^{a+a_n} f(x) dx + \int_a^{a-a_n} f(x) dx \leq \frac{a_n}{n},$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dan Marinescu

Problema 4. Fie K un corp finit cu q elemente, $q \geq 3$. Notăm cu M mulțimea polinoamelor de grad $q-2$ din $K[X]$ care au toți coeficienții nenuli și distincți doi câte doi. Determinați numărul polinoamelor din M care au $q-2$ rădăcini distincte în K .

Marian Andronache