

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Finală, 4 aprilie 2018

CLASA a XI-a

Subiecte

Problema 1. Pentru orice număr natural nenul n și orice matrice coloană

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z}),$$

notăm cu $\delta(\mathbf{X})$ cel mai mare divizor comun al numerelor $x_1, x_2, \dots, x_n$. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, și $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Arătați că următoarele două afirmații sunt echivalente:

(a) $|\det \mathbf{A}| = 1$ și

(b) $\delta(\mathbf{AX}) = \delta(\mathbf{X})$, oricare ar fi $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$.

(Cel mai mare divizor comun al unor numere întregi este număr natural.)

Problema 2. Arătați că $2^{-x} + 2^{-1/x} \leq 1$, oricare ar fi numărul real $x > 0$.

Problema 3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care are proprietatea lui Darboux. Arătați că, dacă f este injectivă pe mulțimea numerelor iraționale, atunci este continuă pe $\mathbb{R}$.

Problema 4. Fie n un număr întreg, $n \geq 2$, și fie $\mathbf{A}$ o matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $\mathbf{A}$ și $\mathbf{A}^2$ să aibă ranguri diferite. Arătați că există o matrice nenulă $\mathbf{B}$ în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{O}_n$.