

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2022****CLASA a XII-a**

Problema 1. Fie e elementul neutru al monoidului $(M, \cdot)$ și $a \in M$ un element inversabil. Arătați că:

- a) Mulțimea $M_a = \{x \in M \mid ax^2a = e\}$ este nevidă;
- b) Dacă $b \in M_a$ este inversabil, atunci $b^{-1} \in M_a$ dacă și numai dacă $a^4 = e$;
- c) Dacă $(M_a, \cdot)$ este monoid, atunci $x^2 = e$, pentru orice $x \in M_a$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $H \neq G$ un subgrup cu proprietatea că $x^2 = y^2$, pentru orice $x, y \in G \setminus H$. Demonstrați că $(H, \cdot)$ este grup comutativ.

Problema 3. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ definim

$$I_n = \int_0^\pi \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \dots \cdot \cos(nx) dx.$$

Să se determine valorile lui n pentru care $I_n = 0$.

Problema 4. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție strict monotonă. Demonstrați că pentru orice $c \in I$ există $a, b \in I$ astfel încât $c \in (a, b)$ și

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a).$$

*Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*