

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureș, 20 aprilie 2016
CLASA a X-a

Enunțuri și bareme

Problema 1.

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \infty)$ astfel încât $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Demonstrați că funcția

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 + a_1^x) \cdot (1 + a_2^x) \cdot \dots \cdot (1 + a_n^x)$$

este crescătoare.

Problema 2.

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietățile

$$\begin{aligned} (P1) \quad f(x+y) &\leq f(x) + f(y), \\ (P2) \quad f(tx + (1-t)y) &\leq tf(x) + (1-t)f(y), \end{aligned}$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ și $t \in [0, 1]$.

a) Demonstrați că oricare ar fi $a \leq b \leq c \leq d$, astfel încât $d - c = b - a$, are loc inegalitatea

$$f(b) + f(c) \leq f(a) + f(d).$$

b) Demonstrați că

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (n-2)(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)) \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} f(x_i + x_j),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, și $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Problema 3.

a) În planul complex de origine O , considerăm punctele A și B , de afixe nenule a și respectiv b . Arătați că $S_{[OAB]} = \frac{1}{4} |\bar{a}b - a\bar{b}|$, unde $S_{[OAB]}$ reprezintă aria triunghiului OAB .

b) Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc $\mathcal{C}$ de centru O . Pentru un punct P interior cercului $\mathcal{C}$, notăm cu $S(P)$ aria triunghiului având lungimile

Problema 4.

Oamenii unui trib străvechi foloseau o limbă în care cuvintele erau formate doar cu literele A și B . Cercetătorii au descoperit că pentru oricare două cuvinte de lungimi egale, există cel puțin trei poziții corespondente în care literele sunt diferite. De exemplu, cuvintele $ABBAA$ și $AAAAB$ diferă în pozițiile 2, 3 și 5, adică în trei poziții.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Demonstrați că în această limbă nu pot exista mai mult de $\left\lfloor \frac{2^n}{n+1} \right\rfloor$ cuvinte de lungime n ($[a]$ este partea întreagă a numărului real a).