

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Timișoara, 20 aprilie 2017

CLASA a IX-a

Problema 1. Fie ABC un triunghi neisoscel, cu centrul de greutate G și centrul cercului înscris I . Arătați că $GI \perp BC$ dacă și numai dacă $AB + AC = 3BC$.

Problema 2. Fie $ABCD$ un pătrat. Considerăm punctele $E \in (AB)$, $N \in (CD)$ și $F, M \in (BC)$, astfel încât triunghiurile AMN și DEF să fie echilaterale. Arătați că

$$PQ = FM,$$

unde $\{P\} = AN \cap DE$ și $\{Q\} = AM \cap EF$.

Problema 3. Fie a și n două numere naturale nenule fixate.

a) Arătați că există n numere naturale nenule $a_1, a_2, \dots, a_n$ astfel încât

$$1 + \frac{1}{a} = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

b) Demonstrați că numărul reprezentărilor de forma de mai sus ale lui $1 + \frac{1}{a}$ este finit.

Problema 4. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $0 < a < b$, iar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care satisface proprietatea

$$f(x^2 + ay) \geq f(x^2 + by), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

a) Arătați că $f(s) \leq f(0) \leq f(t)$, pentru orice $s < 0$ și $t > 0$.

b) Demonstrați că f este constantă pe intervalul $(0, \infty)$.

c) Dați un exemplu de funcție nemonotonă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $(*)$.