

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, București, 7 aprilie 2015

CLASA a VII-a

Problema 1. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $AC < AB$. Pe semidreptele (BA) și (AC) se consideră punctele E și respectiv D astfel încât $A \in (BE)$, $C \in (AD)$, $AE = AC$ și $AD = AB$. Se notează cu M și N mijloacele segmentelor $[BC]$ și $[DE]$, iar $\{R\} = EC \cap BD$. Arătați că $MN = RA$.

Problema 2. Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numerele $n + 8$, $2n + 1$, $4n + 1$ să fie simultan cuburi perfecte.

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC , $m(\hat{B}) = 90^\circ$. Cercul înscris în triunghiul ABC are centrul I , iar punctele F, D și E sunt punctele de contact ale acestui cerc cu laturile $[AB]$, $[BC]$, respectiv $[AC]$. Dacă $CI \cap EF = \{M\}$ și $DM \cap AB = \{N\}$, arătați că:

- a) $AI = ND$;
- b) $FM = \frac{EI \cdot EM}{EC}$.

Problema 4. Determinați numerele prime distincte p, q, r și s care verifică relația

$$1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{pqrs}.$$