



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a X-a

Problema 1. Pentru $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, aflați soluțiile reale ale ecuației

$$a^x = x^x + \log_a(\log_a x).$$

Problema 2. Arătați că, oricare ar fi numerele complexe z_1 și z_2 , are loc inegalitatea

$$|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| + \max\{|z_1|, |z_2|\}.$$

Problema 3. Fie $Z \subset \mathbb{C}$ o mulțime de n numere complexe, $n \geq 2$. Arătați că pentru orice număr natural nenul $m \leq \frac{n}{2}$ există o submulțime U cu m elemente a mulțimii Z astfel ca

$$\left| \sum_{z \in U} z \right| \leq \left| \sum_{z \in Z \setminus U} z \right|.$$

Problema 4. Fie $M = \{1, 2, \dots, n\}$, unde $n \geq 2$ și $\mathcal{P}(M) = \{P \mid P \subseteq M\}$ mulțimea părților lui M . Determinați numărul funcțiilor $f : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ care au proprietatea:

$$|f(A) \cap f(B)| = |A \cap B|, \text{ pentru orice } A, B \in \mathcal{P}(M).$$

(Am notat cu $|X|$ numărul de elemente ale mulțimii X .)

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.