



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Târgu Mureș, 3 aprilie 2024

CLASA a X-a – subiecte

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$3^{\log_5(5x-10)} - 2 = 5^{-1+\log_3 x}.$$

Problema 2. Considerăm pentagonul inscriptibil $ABCDE$ în care $AB = BC = CD$ și centrul de greutate al pentagonului coincide cu centrul cercului circumscris. Arătați că pentagonul $ABCDE$ este regulat.

Centrul de greutate al unui pentagon este punctul din planul pentagonului al cărui vector de poziție este egal cu media aritmetică a vectorilor de poziție ai vârfurilor.

Problema 3. Fie numărul natural $n \geq 2$ și $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ pentru care $f(k) \leq f(k+1) \leq f(k) + 1$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

a) Determinați cardinalul mulțimii $\mathcal{F}$.

b) Determinați numărul total al punctelor fixe ale funcțiilor din $\mathcal{F}$.

Un punct fix al funcției f este un număr $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $f(x) = x$.

Problema 4. Considerăm un număr natural $n \geq 3$, mulțimea $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ și mulțimea $\mathcal{F}$ a funcțiilor de la S la S . Vom spune că o mulțime $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ este generatoare pentru mulțimea $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ dacă orice funcție din $\mathcal{H}$ se poate reprezenta ca o compunere de funcții din $\mathcal{G}$.

a) Fie funcțiile $a : S \rightarrow S$, $a(n-1) = n$, $a(n) = n-1$ și $a(k) = k$ pentru $k \in S \setminus \{n-1, n\}$ și $b : S \rightarrow S$, $b(n) = 1$ și $b(k) = k+1$ pentru $k \in S \setminus \{n\}$. Arătați că $\{a, b\}$ este o mulțime generatoare pentru mulțimea $\mathcal{B}$ a funcțiilor bijective din $\mathcal{F}$.

b) Demonstrați că numărul minim de elemente pe care le are o mulțime generatoare a lui $\mathcal{F}$ este 3.