

Clasa a XI-a

1. Să se determine funcțiile derivabile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică simultan condițiile:

- (i) $f'(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$;
- (ii) pentru $x \in \mathbb{R}$, dacă $f'(x) = 0$, atunci $f(x) = 0$.

2. Fie $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ o matrice cu $\text{tr}(A) = 0$ și cu proprietatea că $I_5 - A$ este inversabilă. Să se arate că $A^5 \neq I_5$.

3. Fie $a \geq 0$ și $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale.

Să se arate că dacă șirul $\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n^a} \right)_{n \geq 1}$ este mărginit, atunci șirul $(y_n)_{n \geq 1}$, definit prin

$$y_n = \frac{x_1}{1^b} + \frac{x_2}{2^b} + \dots + \frac{x_n}{n^b}, \text{ este convergent pentru orice } b > a.$$

4. Matricele $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, unde $m \geq n \geq 2$, au proprietatea că există $k \in \mathbb{N}^*$ și $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$a_k(AB)^k + a_{k-1}(AB)^{k-1} + \dots + a_1(AB) + a_0 I_m = O_m,$$

iar

$$a_k(BA)^k + a_{k-1}(BA)^{k-1} + \dots + a_1(BA) + a_0 I_n = O_n.$$

Demonstrați că $a_0 = 0$.