



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



**Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Brașov, 11 aprilie 2023**

CLASA a VIII-a – subiecte

Problema 1. Se consideră numerele reale pozitive a, b, c , astfel încât $a + b + c = 3$.
Demonstrați că $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b + b^2c + c^2a \geq 6$.

Problema 2. Demonstrați că:

- a) există o infinitate de perechi (x, y) de numere reale din intervalul $[0, \sqrt{3}]$ care verifică egalitatea $x \cdot \sqrt{3 - y^2} + y \cdot \sqrt{3 - x^2} = 3$;
- b) **nu** există nicio pereche (x, y) de numere raționale din intervalul $[0, \sqrt{3}]$, astfel încât să aibă loc egalitatea $x \cdot \sqrt{3 - y^2} + y \cdot \sqrt{3 - x^2} = 3$.

Problema 3. Spunem că un număr natural n este *interesant* dacă poate fi scris sub forma $n = \left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{c} \right\rfloor$, unde a, b și c sunt numere reale pozitive astfel încât $a + b + c = 1$.
Determinați toate numerele interesante. ($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .)

Problema 4. Fie $ABCD$ un tetraedru și mijloacele M, N ale muchiilor AC , respectiv BD .
Arătați că pentru orice punct P de pe segmentul MN , cu $P \neq M$ și $P \neq N$, există și sunt unice punctele X și Y pe segmentele AB , respectiv CD , astfel încât X, P și Y sunt coliniare.