



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureș, 20 aprilie 2016
CLASA a VIII-a

Problema 1. Vârfurile unei prisme se colorează cu două culori astfel încât capetele fiecărei muchii laterale să fie colorate diferit. Se consideră toate segmentele care unesc câte două vârfuri ale prisme, altele decât muchiile laterale. Arătați că numărul segmentelor cu capetele colorate diferit coincide cu numărul segmentelor cu capetele colorate la fel.

Problema 2. Într-un cub $ABCD A' B' C' D'$ se consideră două puncte $M \in (CD')$ și $N \in (DA')$. Arătați că MN este perpendiculara comună a dreptelor CD' și DA' dacă și numai dacă $\frac{D'M}{D'C} = \frac{DN}{DA'} = \frac{1}{3}$.

Problema 3. Dacă a , b și c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătați că

$$\frac{3}{2} \leq \frac{b+c}{b+c+2a} + \frac{a+c}{a+c+2b} + \frac{a+b}{a+b+2c} < \frac{5}{3}.$$

Problema 4. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ spunem că numerele naturale $x_1, x_2, \dots, x_n$ au proprietatea $(\mathcal{P})$, dacă

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n.$$

a) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există n numere naturale nenule cu proprietatea $(\mathcal{P})$.

b) Determinați numerele naturale $n \geq 2$ pentru care există n numere naturale $x_1, x_2, \dots, x_n$, cu $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$, care au proprietatea $(\mathcal{P})$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.