



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, București, 7 aprilie 2015

CLASA a VI-a

Problema 1. Determinați numerele naturale care au proprietatea că admit exact 8 divizori pozitivi, dintre care trei sunt numere prime de forma a , bc și $\overline{cb}$ și $a + \overline{bc} + \overline{cb}$ este pătrat perfect, unde a, b și c sunt cifre cu $b < c$.

Problema 2. a) Determinați numerele naturale a pentru care

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+3} < \frac{1}{3}.$$

b) Demonstrați că pentru orice număr natural $p \geq 2$ există p numere naturale consecutive $a_1, a_2, \dots, a_p$ astfel încât

$$\frac{1}{p+1} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_p} < \frac{1}{p}.$$

Problema 3. Arătați că dacă x, y și n sunt numere naturale astfel încât

$$n = \frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3},$$

atunci

a) $n = y^2 - x^2$;

b) n este multiplu de 20.

Problema 4. Se consideră un triunghi ABC în care $m(\sphericalangle BAC) = \frac{4}{3} \cdot m(\sphericalangle ABC) < 90^\circ$. Fie (AE) bisectoarea unghiului BAC , cu $E \in (BC)$ și punctul $F \in (AE)$ astfel încât $m(\sphericalangle ABF) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle BAC)$ și $[AF] \equiv [AC]$. Determinați măsura unghiului BCF .