

Olimpiada Națională de Matematică

Primul test de selecție pentru OBM și OIM
Iași, 8 aprilie 2010

Problema 1. Fie $P_1, P_2, \dots, P_n$ puncte distincte pe un cerc, $n \geq 3$. Determinați numărul maxim de coarde închise $[P_i P_j]$, $i \neq j$, cu proprietatea că oricare două au un punct comun.

Problema 2. Fie numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$. Arătați că funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a_1 + x}{a_2 + x} + \frac{a_2 + x}{a_3 + x} + \dots + \frac{a_{n-1} + x}{a_n + x} + \frac{a_n + x}{a_1 + x},$$

este descrescătoare.

Problema 3. Se consideră două dreptunghiuri egale de arie 2, astfel încât suprafețele acestora se intersectează după un octogon $ABCDEFGH$. Arătați că aria patrulaterului $ACEG$ este mai mare sau egală cu 1.

Problema 4. Cercurile γ_1 și γ_2 se intersectează în punctele M și N . Fie A un punct situat pe cercul γ_1 și D un punct situat pe cercul γ_2 . Dreptele AM și AN intersectează a doua oară cercul γ_2 în punctele B , respectiv C . Dreptele DM și DN intersectează a doua oară cercul γ_1 în punctele E , respectiv F . Punctele A, E și F sunt situate de aceeași parte a dreptei MN . Știind că segmentele AB și DE sunt congruente, arătați că punctele A, F, C și D sunt situate pe un cerc al cărui centru nu depinde de poziția punctelor A și D .

Problema 5. Fie n și a două numere naturale astfel încât a nu are niciun factor prim mai mic sau egal decât n . Arătați că $n!$ divide

$$(a-1)(a^2-1) \dots (a^{n-1}-1).$$

Timp de lucru $4\frac{1}{2}$ ore.

Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Al doilea test de selecție pentru OBM și OIM
București, 24 aprilie 2010

Problema 1. Fie n un număr întreg strict pozitiv. Să se determine valoarea minimă a numărului

$$\max \left(\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \dots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\dots+x_n} \right),$$

unde $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt numere reale pozitive, a căror sumă este egală cu 1.

Problema 2. a) Fie k un număr întreg strict pozitiv. Să se demonstreze că nu există două numere întregi distincte din intervalul deschis $(k^2, (k+1)^2)$ al căror produs să fie pătrat perfect.

b) Fie n un număr întreg strict mai mare decât 2. Să se demonstreze că există un număr natural p cu proprietatea că, pentru orice număr întreg k mai mare decât p , în intervalul deschis $(k^n, (k+1)^n)$ există n numere întregi distincte al căror produs să fie puterea de ordin n a unui număr întreg.

Problema 3. Considerăm două cercuri C_1 și C_2 tangente în punctul P . Prin P se duc două drepte d_1, d_2 . Dreapta d_1 intersectează cercul C_1 în B și cercul C_2 în punctul F , iar dreapta d_2 intersectează cercul C_1 în C și cercul C_2 în punctul G . Fie A un punct arbitrar, nesituat pe cele două cercuri și nici pe cele două drepte. Cercul circumscris triunghiului PAB intersectează cercul C_2 în punctul D , iar cercul circumscris triunghiului PAC intersectează C_2 în punctul E . Să se arate că dreptele AP, EF, DG sunt concurente sau paralele.

Problema 4. Fie n un număr întreg mai mare sau egal decât 2. În interiorul pătratului $[0, n] \times [0, n]$ se consideră un poligon convex a cărui arie este strict mai mare decât n . Să se arate că există un punct de coordonate întregi situat în interiorul sau pe laturile poligonului.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Al treilea test de selecție pentru OBM și OIM
București, 25 aprilie 2010

Problema 1. Fie n un număr întreg strict pozitiv și $x_1, x_2, \dots, x_n$ numere reale pozitive astfel încât $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Arătați că

$$\sum_{i=1}^n x_i^n (1 + x_i) \geq \frac{n}{2^{n-1}} \prod_{i=1}^n (1 + x_i).$$

Problema 2. Fie ABC un triunghi astfel încât $AB \neq AC$. Bisectoarele interioare ale unghiurilor ABC și ACB intersectează laturile opuse în punctele B_0 , respectiv C_0 , și cercul circumscris triunghiului ABC în punctele B_1 , respectiv C_1 . Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC . Arătați că drepte B_0C_0 , B_1C_1 și paralela prin I la BC sunt concurente.

Problema 3. Fie a un număr întreg strict pozitiv. Arătați că există o infinitate de numere întregi m , $m \geq 1$, astfel încât $\sigma(am) < \sigma(am + 1)$, unde $\sigma(n)$ este suma tuturor divizorilor pozitivi ai numărului natural $n \geq 1$, inclusiv 1 și n .

Problema 4. Fie X și Y două submulțimi finite ale intervalului $[0, 1)$, astfel încât $0 \in X \cap Y$ și $x + y \neq 1$ oricare ar fi $x \in X$ și $y \in Y$. Arătați că mulțimea

$$\{x + y - [x + y] : x \in X \text{ și } y \in Y\}$$

are cel puțin $|X| + |Y| - 1$ elemente, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a , iar $|A|$ este numărul de elemente ale mulțimii A .

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Al patrulea test de selecție pentru OIM
Cabana Gâlma, 18 mai 2010

Problema 1. Fie P un punct în plan și γ un cerc care nu trece prin punctul P . Două drepte variabile distincte, d și d' , care trec prin punctul P , intersectează cercul γ în punctele X și Y , respectiv X' și Y' . Fie M , respectiv N , punctul diametral opus lui P în cercul PXX' , respectiv PYY' . Arătați că dreapta MN trece printr-un punct fix.

Problema 2. Fie ABC un triunghi scalen. Tangentele la cercul celor nouă puncte al triunghiului ABC , duse prin piciorul înălțimii din A , respectiv mijlocul laturii BC , se intersectează în punctul A' ; punctele B' și C' sunt definite în mod analog. Arătați că dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente.

Problema 3. Fie $\mathcal{L}$ o mulțime finită de drepte în plan, situate în poziție generală: oricare două drepte din $\mathcal{L}$ nu sunt paralele și oricare trei nu sunt concurente. Considerăm discul deschis înscris în fiecare triunghi determinat de câte trei drepte din $\mathcal{L}$. Determinați numărul de astfel de discuri care nu sunt intersectate de către nicio dreaptă din $\mathcal{L}$, în funcție de $|\mathcal{L}|$.

Țimp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

**Al cincilea test de selecție pentru OIM
Cabana Gâlma, 20 mai 2010**

Problema 1. Fiecare punct al planului este colorat cu una din două culori. Dat fiind un număr impar $n \geq 3$, arătați că există două triunghiuri asemenea, care au raportul de asemănare n , astfel încât vârfurile fiecărui triunghi să aibă aceeași culoare.

Problema 2. Fie d o dreaptă și γ, γ' două cercuri în plan. Dreapta d intersectează cercul γ în punctele A și B , iar cercul γ' în punctele A' și B' . Tangentele în punctele A și B la cercul γ se intersectează în punctul C , iar tangentele în punctele A' și B' la cercul γ' se intersectează în punctul C' . Prin punctul de intersecție a dreptelor d și CC' , considerăm o dreaptă variabilă δ . Fie X unul dintre punctele de intersecție a dreptei δ cu cercul γ și X' unul dintre punctele de intersecție a dreptei δ cu cercul γ' . Arătați că punctul de intersecție a dreptelor CX și $C'X'$ se află pe un cerc fix.

Problema 3. Fie p un număr prim, $n_1 > n_2 > \dots > n_p$ numere întregi strict pozitive și d cel mai mare divizor comun al numerelor $n_1, n_2, \dots, n_p$. Arătați că polinomul

$$\frac{X^{n_1} + X^{n_2} + \dots + X^{n_p} - p}{X^d - 1}$$

este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Timp de lucru 4 ore și 30 de minute

Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Al șaselea test de selecție pentru OIM
Cabana Gâlma, 21 mai 2010

Problema 1. Un polinom neconstant f , cu coeficienți întregi, are următoarea proprietate: oricare ar fi numărul prim p , există un număr prim q și un număr întreg strict pozitiv m , astfel încât $f(p) = q^m$. Arătați că $f = X^n$, unde n este un număr întreg strict pozitiv.

Problema 2. Fie ABC un triunghi scalen, I centrul cercului său înscris și A_1, B_1, C_1 punctele de contact ale cercurilor exînscrie cu laturile BC, CA , respectiv AB . Arătați că cercurile circumscrise triunghiurilor AIA_1, BIB_1 și CIC_1 au un punct comun diferit de I .

Problema 3. Fie n un număr întreg strict pozitiv. Dacă S este o mulțime finită de vectori în plan, notăm cu $N(S)$ numărul de submulțimi $\{v, v'\} \subseteq S$, ale căror elemente îndeplinesc condiția

$$4(v \cdot v') + (|v|^2 - 1)(|v'|^2 - 1) < 0.$$

Determinați valoarea maximă a lui $N(S)$, când S parcurge familia mulțimilor de n vectori în plan.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.