



Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2012. március 10.

XII. OSZTÁLY

1. feladat. Adottak az a , b és c páronként különböző szigorúan pozitív valós számok. Számítsd ki a következő határértéket:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)} dx.$$

2. feladat. Adott a 9 elemű $(A, +, \cdot)$ gyűrű. Igazold, hogy a következő állítások ekvivalensek:

- (a) Bármely $x \in A \setminus \{0\}$ esetén léteznek az $a \in \{-1, 0, 1\}$ és $b \in \{-1, 1\}$ számok úgy, hogy $x^2 + ax + b = 0$.
- (b) $(A, +, \cdot)$ test.

3. feladat. Az n elemű G véges csoport semleges eleme e . Határozd meg az összes olyan $f : G \rightarrow \mathbb{N}^*$ függvényt, amely egyidejűleg teljesíti a következő két feltételt:

- (a) $f(x) = 1$ akkor és csakis akkor, ha $x = e$;
- (b) $f(x^k) = \frac{f(x)}{(f(x), k)}$, az n szám bármely k természetes szám osztója esetén, ahol (r, s) az r és s természetes számok legnagyobb közös osztója.

Gazeta Matematică

4. feladat. Adott az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deriválható függvény úgy, hogy $f(0) = f(1) = 0$ és $|f'(x)| \leq 1$, bármely $x \in [0, 1]$ esetén. Igazold, hogy:

$$\left| \int_0^1 f(t) dt \right| < \frac{1}{4}.$$

Munkaidő 4 óra.

Minden feladatra 7 pont szerezhető.