



**Olimpiada Națională de Matematică
Oradea, 20 aprilie 2011**

Primul test de selecție pentru juniori

Problema 1. Un număr natural nenul se numește *echilibrat* dacă numărul factorilor primi distincți ai săi este egal cu numărul cifrelor din scrierea sa zecimală (de exemplu, numărul $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$ este echilibrat, însă $275 = 5^2 \cdot 11$ nu este echilibrat). Să se arate că există un număr finit de numere echilibrate.

Problema 2. Considerăm un pentagon convex $A_0A_1A_2A_3A_4$ astfel încât semidreptele (A_iA_{i+1}) și $(A_{i+3}A_{i+2})$ se intersectează în punctul B_{i+4} , oricare ar fi $i = 0, 1, 2, 3, 4$ – indicii sunt considerați modulo 5. Să se arate că

$$\prod_{i=0}^4 A_i B_{i+3} = \prod_{i=0}^4 A_i B_{i+2}.$$

Problema 3. Fie n un număr natural nenul și fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ și $y_1, y_2, \dots, y_n$ numere reale. Să se arate că există un număr i , $i = 1, 2, \dots, n$, astfel încât

$$\sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \leq \sum_{j=1}^n |x_i - y_j|.$$

Problema 4. Fie k și n două numere întregi astfel încât $2 \leq k \leq n-1$. Considerăm o mulțime A de n numere reale cu proprietatea că suma oricăror k elemente distincte ale sale este un număr rațional. Să se arate că toate elementele lui A sunt numere raționale.

Problema 5. Fie n persoane, fiecare vorbind cel mult 3 limbi. În fiecare grup de 3 persoane există măcar două persoane care vorbesc în comun o limbă.

i) Dacă $n \leq 8$, să se arate că este posibil ca nicio limbă să nu fie vorbită de mai mult de 2 persoane.

ii) Dacă $n \geq 9$, să se arate că există o limbă vorbită de cel puțin 3 persoane.