

ONAA 2014
SENIORI
Analiza Datelor - BARAJ

Problema 1

Viteza luminii. Să ne imaginăm că într-un viitor îndepărtat Sistemul Solar va fi ocupat (locuit) de urmașii noștri. Un mic robot minier, instalat pe asteroidul SALTIS, este supravegheat de Celesta Spacedigger, care se întâmplă să fie și un astronom amator pasionat. În nopțile lungi de pe Saltis, Celesta (personaj din mitologia greacă) studiază stelele și planetele, în mod deosebit minunata planetă Saturn. Un vechi almanah astronomic, dar de încredere, îi este de ajutor să urmărească în timp desfășurarea unor evenimente cerești, precum eclipsele lui Titan, datorate planetei Saturn. Spre surprinderea sa, Celesta constată mari deosebiri între timpii observați ai eclipselor lui Titan și valorile din tabelele existente în almanah. După ani de observații atente (fiind detașată ani mulți pe Saltis), Celesta începe să găsească o explicație. Deosebirile sunt cele mai mari, când Saturn este aproape de opoziția sau conjuncția cu Soarele, văzute de pe Saltis. Celesta realizează că se întâmplă așa deoarece viteza luminii este finită și o prezentare din almanahul său confirmă că sincronizările din tabele sunt heliocentrice, adică așa cum sunt văzute de pe Soare și nu de pe Saltis. Foarte satisfăcută de descoperirea sa, Celesta a utilizat aceste observații pentru a calcula viteza luminii.

În această problemă trebuie repetate calculele Celestei, utilizând observațiile sale. Unitățile de măsură pentru lungime și pentru timp, utilizate de Celesta, sunt puțin diferite de unitățile utilizate de noi. Unitatea de măsură pentru timp, numită **pinit**, este definită astfel încât perioada rotației sinodice a lui Saltis să fie $T_{\text{sinodic, Saltis}} = 1000 \text{ pinit}$. Unitatea de măsură pentru lungime, numită **seter**, este definită astfel încât să reprezinte 10^{-9} din distanța medie Soare – Saltis, adică $r_{\text{Saltis, Soare}} = 10^9 \text{ seter}$.

a) Înregistrările Celestei, asupra eclipselor lui Titan, făcute atunci când Saturn a fost aproape de opoziție sau de conjuncție, pentru un număr de 6 observații, sunt date în tabelul alăturat, în coloanele sale fiind notate:

Numărul Observației	Tabel Almanah (pinit) I	Observații Celesta (pinit) II	Precizare III
1	456,47	450,32	Opoziție
2	18,50	12,28	Opoziție
3	821,41	815,29	Opoziție
4	444,70	450,85	Conjuncție
5	615,43	621,52	Conjuncție
6	791,94	798,02	Conjuncție

I) valorile din tabelele almanahului referitoare la momentul când un observator localizat pe Soare ar observa începutul eclipsei;

II) valorile observațiilor Celestei referitoare la momentul începutul eclipselor văzute de pe Saltis; acuratețea estimărilor sincronizărilor este $\varepsilon = 0,03$ pinit;

III) poziția lui Saturn pe durata eclipsei lui Titan (apropiat de Opoziție sau Conjuncție).

Analizând cu atenție datele din tabel, să se estimeze valoarea vitezei luminii, exprimând-o în seter/pinit și să se precizeze eroarea presupusă a estimării.

b) În zilele de singurătate, petrecute pe Saltis, Celestei îi place să asculte semnalele radio de pe Pământ. Știind acum viteza luminii, Celesta se hotărăște să *determine* raza orbitei Pământului, exprimând-o în seter. Ea își sincronizează foarte precis ceasul său cu semnalele de timp primite de pe Pământ. Rezultatele măsurătorilor sale sunt redată în graficul din figura alăturată.

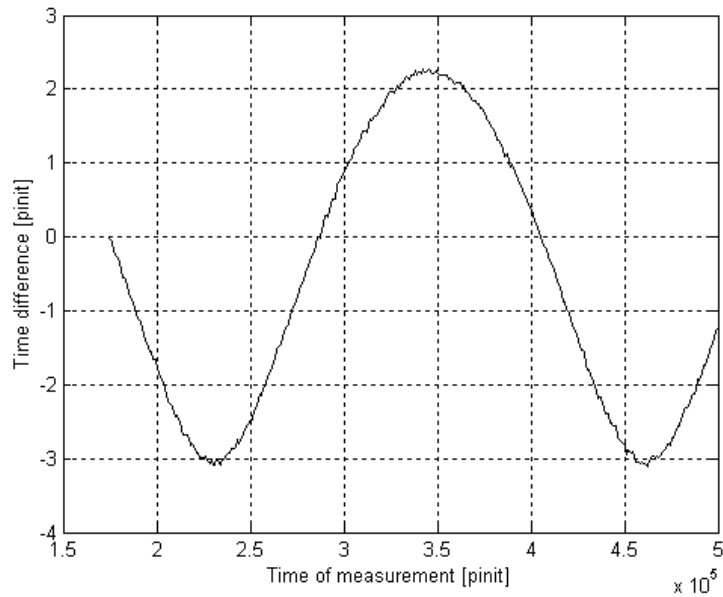


Fig.

Să se estimeze raza orbitei Pământului, exprimând-o în seter, utilizând datele Celestei din graficul dat.

c) Știind că:

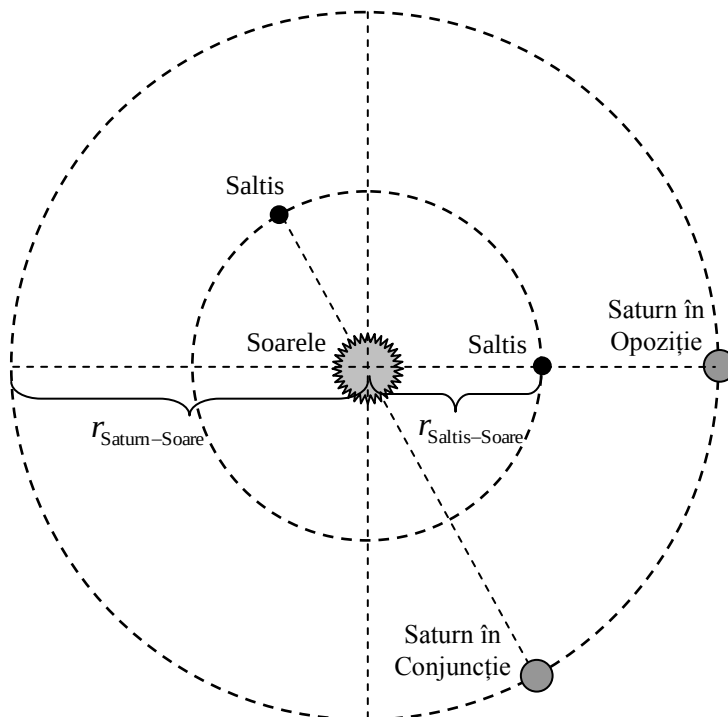
$$1 \text{ UA} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}; c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

să se determine: echivalentul în metri pentru 1 seter; echivalentul în secunde pentru 1 pinit.

d) *Să se estimeze perioada orbitală siderală a lui Saltis, exprimând-o în ani, utilizând graficul dat.*

Rezolvare

a) Notății în desenul din figura alăturată: $r_{\text{Saturn-Soare}}$ – raza orbitei lui Saturn (distanța dintre Saturn și Soare); $r_{\text{Saltis-Soare}}$ – raza orbitei lui Saltis (distanța dintre Saltis și Soare); c – viteza luminii; $r_{\text{Saturn-Soare}}/c$ – timpul necesar luminii să ajungă de la Soare, la Saturn.

**Fig.**

$$t_{\text{Soare-Saturn Opozitie}} = \frac{r_{\text{Saturn-Soare}} - r_{\text{Saltis-Soare}}}{c};$$

$$t_{\text{Soare-Saturn, Conjunctie}} = \frac{r_{\text{Saturn-Soare}} + r_{\text{Saltis-Soare}}}{c};$$

$$\Delta t_{\text{Opozitie}} = \frac{r_{\text{Saturn-Soare}}}{c} - \frac{r_{\text{Saturn-Soare}} - r_{\text{Saltis-Soare}}}{c} = \frac{r_{\text{Saltis-Soare}}}{c} > 0,$$

ceea ce presupune că la Opoziții, eclipsele lui Titan, văzute de Celesta, se petrec mai devreme decât prevedea Almanahul;

$$\Delta t_{\text{Conjunctie}} = \frac{r_{\text{Saturn-Soare}}}{c} - \frac{r_{\text{Saturn-Soare}} + r_{\text{Saltis-Soare}}}{c} = -\frac{r_{\text{Saltis-Soare}}}{c} < 0,$$

ceea ce presupune că la Conjuncții, eclipsele lui Titan, văzute de Celesta, se petrec mai târziu decât prevedea Almanahul.

Utilizând valorile date în tabelul din enunțul problemei se calculează diferența dintre momentele în care Titan este eclipsat de Saturn, cele luate din Almanah și cele notate de Celesta, completându-se tabelul alăturat.

Numărul Observației	Tabel Almanah (pinit)	Observații Celesta (pinit)	Precizare	Diferența (pinit)
1	456,47	450,32	Opoziție	6,15
2	18,50	12,28	Opoziție	6,22
3	821,41	815,29	Opoziție	6,12
4	444,70	450,85	Conjunție	-6,15
5	615,43	621,52	Conjunție	-6,09
6	791,94	798,02	Conjunție	-6,08

Considerând că cea mai bună determinare a lui $\Delta t_{\text{Opozitie}}$ este valoarea cea mai mare din tabel, 6,22 pinit, rezultă:

$$\Delta t_{\text{Opozitie}} = (6,22 \pm 0,01) \text{ pinit};$$

$$r_{\text{Saltis-Soare}} = 10^9 \text{ seter};$$

$$\Delta t_{\text{Opozitie}} = \frac{r_{\text{Saltis-Soare}}}{c}; c = \frac{r_{\text{Saltis-Soare}}}{\Delta t_{\text{Opozitie}}};$$

$$c = \frac{10^9 \text{ seter}}{6,22 \text{ pinit}} = \frac{10}{6,22} \cdot 10^8 \frac{\text{seter}}{\text{pinit}} \approx 1,60 \cdot 10^8 \frac{\text{seter}}{\text{pinit}};$$

$$c = (1,60 \pm 0,03) \cdot 10^8 \frac{\text{seter}}{\text{pinit}},$$

reprezentând viteza luminii, determinată de Celesta, exprimată în seter/pinit.

Valorile negative ale lui $\Delta t_{\text{Conjunctie}}$ nu pot fi acceptate, ele datorându-se dificultăților de observare a lui Saturn, în timpul Conjunției, el fiind proiectat pe sfera cerească aproape de Soare.

b) Utilizând desenele din figurile alăturate, rezultă:

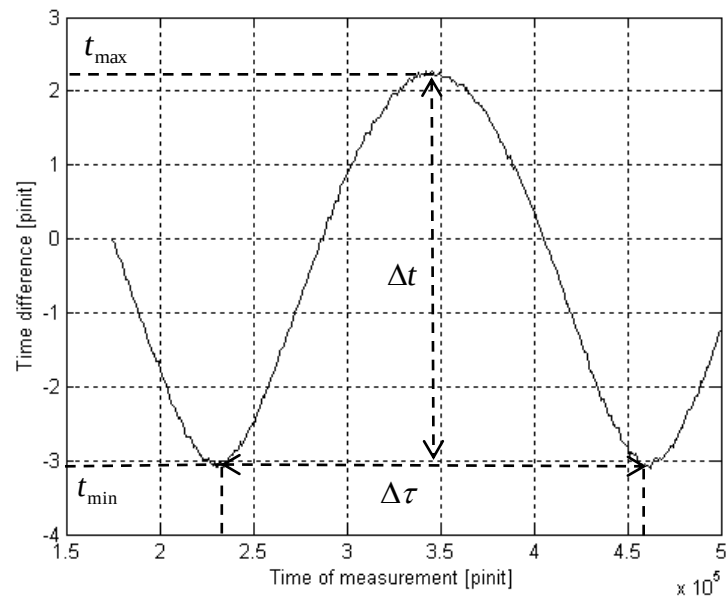


Fig.

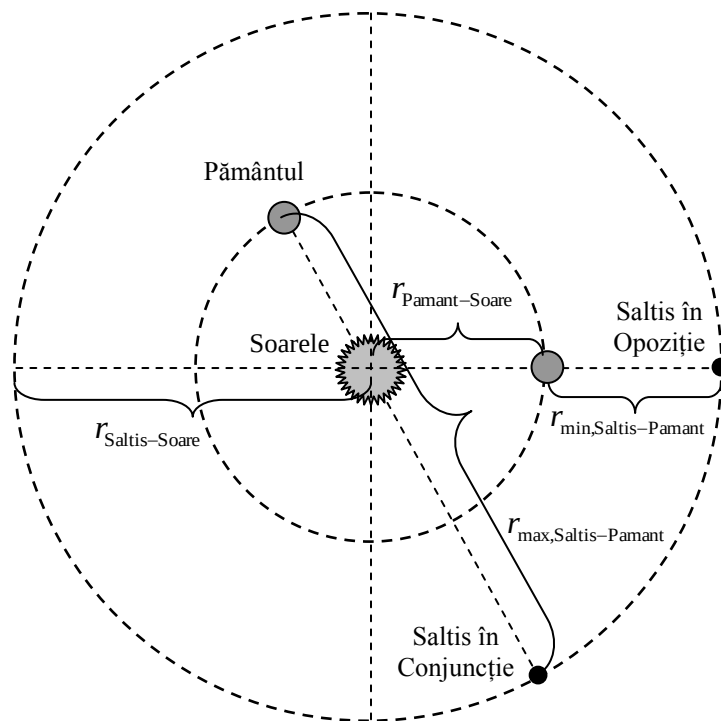


Fig.

$$\Delta t = t_{\max} - t_{\min} \approx 5,3 \text{ pinit};$$

$$r_{\text{max,Saltis-Pământ}} - r_{\text{min,Saltis-Pământ}} = 2 \cdot r_{\text{Pământ-Soare}};$$

$$c = 1,60 \cdot 10^8 \frac{\text{seter}}{\text{pinit}};$$

$$\Delta t \cdot c = 5,3 \text{ pinit} \cdot 1,6 \cdot 10^8 \frac{\text{seter}}{\text{pinit}} \approx 8,5 \cdot 10^8 \text{ seter};$$

$$r_{\text{Pământ-Soare}} = \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot c = 4,25 \cdot 10^8 \text{ seter} = 1 \text{ UA}.$$

c)

$$1 \text{ UA} = 4,25 \cdot 10^8 \text{ seter}; 1 \text{ UA} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km};$$

$$4,25 \cdot 10^8 \text{ seter} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km} = 149,6 \cdot 10^9 \text{ m};$$

$$1 \text{ seter} = 352 \text{ m};$$

$$c = 1,60 \cdot 10^8 \frac{\text{seter}}{\text{pinit}}; c = 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}};$$

$$1,60 \cdot 10^8 \frac{\text{seter}}{\text{pinit}} = 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}};$$

$$1,60 \cdot 10^8 \frac{352 \text{ m}}{\text{pinit}} = 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}};$$

$$\frac{1,6 \cdot 352}{\text{pinit}} = \frac{2,998}{\text{s}}; 1 \text{ pinit} \approx 188 \text{ s}.$$

d) Intervalul de timp dintre două opoziții consecutive ale lui Saltis (perioada sinodică a lui Saltis), dedusă din grafic, este:

$$\Delta \tau = 4,6 \cdot 10^5 \text{ pinit} - 2,3 \cdot 10^5 \text{ pinit} = 2,3 \cdot 10^5 \text{ pinit} = 432,4 \cdot 10^5 \text{ s} \approx 1,4 \text{ ani};$$

$$T_{\text{sidereal, Pământ}} = 1 \text{ an}; T_{\text{sinodic, Saltis}} = \Delta \tau = 1,4 \text{ ani};$$

$$\frac{1}{T_{\text{sidereal, Saltis}}} = \frac{1}{T_{\text{sidereal, Pământ}}} - \frac{1}{T_{\text{sinodic, Saltis}}},$$

deoarece orbita lui Saltis este exterioară orbitei Pământului;

$$T_{\text{sidereal, Saltis}} = \frac{T_{\text{sinodic, Saltis}} \cdot T_{\text{sidereal, Pământ}}}{T_{\text{sinodic, Saltis}} - T_{\text{sidereal, Pământ}}} = \frac{1,4 \text{ ani} \cdot 1 \text{ an}}{1,4 \text{ ani} - 1 \text{ an}} = 3,5 \text{ ani}.$$

Sau, în acord cu legea a treia a lui Kepler, rezultă:

$$T_{\text{sidereal, Pământ}}^2 = k \cdot a_{\text{Pământ}}^3; T_{\text{sidereal, Saltis}}^2 = k \cdot a_{\text{Saltis}}^3;$$

$$\left(\frac{T_{\text{sidereal, Saltis}}}{T_{\text{sidereal, Pământ}}} \right)^2 = \left(\frac{a_{\text{Saltis}}}{a_{\text{Pământ}}} \right)^3;$$

$$T_{\text{sidereal, Saltis}} = T_{\text{sidereal, Pământ}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{a_{\text{Saltis}}}{a_{\text{Pământ}}} \right)^3} = T_{\text{sidereal, Pământ}} \cdot \left(\frac{a_{\text{Saltis}}}{a_{\text{Pământ}}} \right)^{3/2};$$

$$r_{\text{Saltis-Soare}} = 10^9 \text{ seter}; 1 \text{ seter} = 352 \text{ m};$$

$$r_{\text{Saltis-Soare}} = 10^9 \cdot 352 \text{ m} = a_{\text{Saltis}};$$

$$a_{\text{Pământ}} = 149 \cdot 10^6 \text{ km}; T_{\text{sidereal, Pământ}} = 1 \text{ an};$$

$$T_{\text{sideral,Saltis}} = T_{\text{sideral,Pamant}} \cdot \left(\frac{a_{\text{Saltis}}}{a_{\text{Pamant}}} \right)^{3/2} = 1 \text{ an} \cdot \left(\frac{10^9 \cdot 352 \text{ m}}{149 \cdot 10^9 \text{ m}} \right)^{3/2} ;$$

$$T_{\text{sideral,Saltis}} = 1 \text{ an} \cdot \left(\frac{352}{149} \right)^{3/2} = (2,36)^{3/2} \text{ ani} \approx 3,6 \text{ ani}.$$

Problema 2

Orbitele planetelor. Se admite că orbita Pământului în jurul Soarelui este un cerc cu raza $r_p = 1 \text{ UA}$. În tabelul alăturat sunt date elongațiile unghiulare maxime estice și vestice ale planetelor Mercur și Venus pentru anumite momente, precizate.

a) Admițând că orbitele celor trei planete (Pământul, Venus și Mercur), în raport cu Soarele, ar fi cercuri concentrice și coplanare, să considerăm că Venus/Mercur se află în pozițiile corespunzătoare elongațiilor estice maxime. *Să se determine*, după cât timp Venus/Mercur se vor afla:

1) *pentru prima dată*, în pozițiile corespunzătoare elongațiilor vestice maxime;

2) *din nou* în poziții corespunzătoare elongațiilor estice maxime.

b) Corespunzător datelor înscrise în tabel, folosind o foaie de hârtie pe care este reprezentată orbita circulară a Pământului, având Soarele în centrul său, *să se localizeze*, cu aproximație, pozițiile planetelor Mercur și Venus în jurul Soarelui și *să se determine* distanța medie dintre Mercur și Soare, precum și distanța medie dintre Venus și Soare.

c) *Să se determine* valorile exacte ale parametrilor orbitelor lui Mercur și Venus, $(a; b; e)$, exprimate în UA, știind că:

$$18^\circ \leq \alpha_{\text{max,Est}}^{\text{Mercur}} \leq 28^\circ; 18^\circ \leq \alpha_{\text{max,Vest}}^{\text{Mercur}} \leq 28^\circ;$$

$$45^\circ \leq \alpha_{\text{max,Est}}^{\text{Venus}} \leq 48^\circ; 45^\circ \leq \alpha_{\text{max,Vest}}^{\text{Venus}} \leq 48^\circ.$$

Tabel - Elongațiile maxime ale planetelor Mercur și Venus

Mercur: 1989 - 1990			Venus: 1983 - 1990		
Ziua	$\alpha_{\text{max,Est}}$	$\alpha_{\text{max,Vest}}$	Ziua	$\alpha_{\text{max,Est}}$	$\alpha_{\text{max,Vest}}$
8 ianuarie 1989	19°		15 iunie 1983	45°	
18 februarie 1989		26°	4 noiembrie 1983		47°
30 aprilie 1989	21°		21 ianuarie 1985	47°	
18 iunie 1989		23°	12 iunie 1985		46°
28 august 1989	20°		26 august 1986	46°	
10 octombrie 1989		18°	15 ianuarie 1987		47°
22 decembrie 1989	20°		2 aprilie 1988	46°	
1 februarie 1990		25°	22 august 1988		46°
13 aprilie 1990	20°		8 noiembrie 1989	47°	
31 mai 1990		25°	30 martie 1990		46°

11 august 1990	27°	
24 septembrie 1990		18°
5 decembrie 1990	21°	

Rezolvare

a) Admițând că orbitele celor trei planete (Pământul, Venus și Mercur), în raport cu Soarele, ar fi cercuri concentrice și coplanare, așa cum indică desenele din figurile alăturate, atunci elongațiile (depărtările) unghiulare maxime, ale fiecăreia dintre planetele Venus și Mercur, față de Soare, privite de pe Pământ, vor fi constante în timp și egale, $\alpha_{\max, \text{Est}} = \alpha_{\max, \text{Vest}}$.

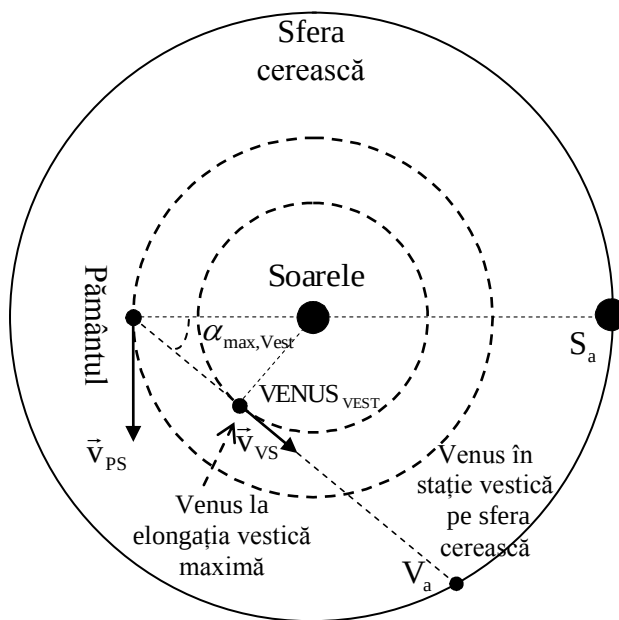
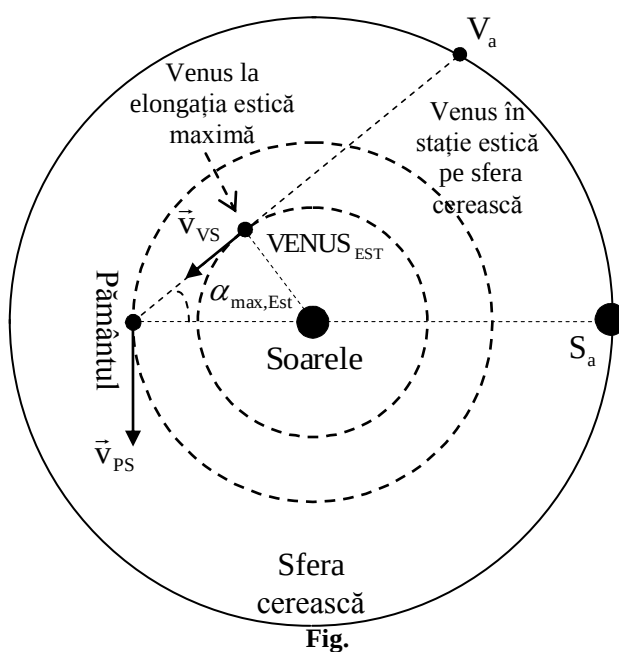


Fig.

În aceste condiții, se acceptă următoarele valori ale elongațiilor maxime pentru planetele Mercur și Venus:

$$\alpha_{\max, \text{Est}, \text{Mercur}} = \alpha_{\max, \text{Vest}, \text{Mercur}} = 27^\circ;$$

$$\alpha_{\max, \text{Est}, \text{Venus}} = \alpha_{\max, \text{Vest}, \text{Venus}} = 47^\circ.$$

Cunoscând valorile precizate anterior, să considerăm că Venus / Mercur se află în pozițiile corespunzătoare elongațiilor estice maxime.

1) În acord cu desenul din figura alăturată, pentru planeta Venus, rezultă:

$$\beta_V = 90^\circ - \alpha_{\max, \text{Est}} + \beta_P + 90^\circ - \alpha_{\max, \text{Vest}};$$

$$\beta_V - \beta_P = 180^\circ - 2\alpha_{\max, \text{Est}};$$

$$(\omega_V - \omega_P)t = 180^\circ - 2 \cdot 47^\circ = 86^\circ;$$

$$2\pi \cdot \frac{T_P - T_V}{T_P T_V} \cdot t = 86^\circ;$$

$$t = \frac{86^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{T_P T_V}{T_P - T_V} \approx 0,24 \cdot \frac{T_P T_V}{T_P - T_V} = 0,24 \cdot \frac{365,2 \text{ zile} \cdot 234,7 \text{ zile}}{365,2 \text{ zile} - 234,7 \text{ zile}} \approx 157,6 \text{ zile};$$

$$\beta_P = \omega_P t = \frac{2\pi}{T_P} t \approx 155,4^\circ;$$

$$\beta_V = \omega_V t = \frac{2\pi}{T_V} t \approx 241,7^\circ.$$

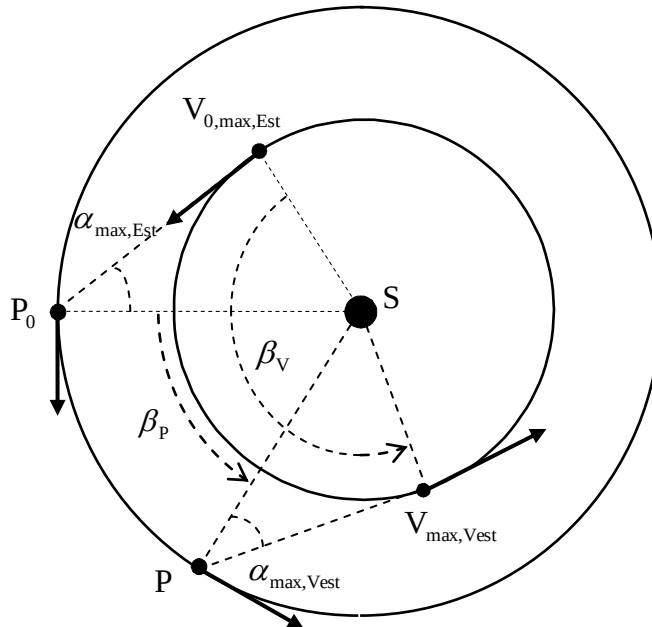


Fig.

Asemănător, pentru planeta Mercur, rezultă:

$$\beta_M = 90^\circ - \alpha_{\max, \text{Est}} + \beta_P + 90^\circ - \alpha_{\max, \text{Vest}};$$

$$\beta_M - \beta_P = 180^\circ - 2\alpha_{\max, \text{Est}};$$

$$(\omega_M - \omega_P)t = 180^\circ - 2 \cdot 27^\circ = 126^\circ;$$

$$2\pi \cdot \frac{T_P - T_V}{T_P T_V} \cdot t = 126^\circ;$$

$$t = \frac{126^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{T_P T_M}{T_P - T_M} \approx 0,35 \cdot \frac{T_P T_M}{T_P - T_M} = 0,35 \cdot \frac{365,2 \text{ zile} \cdot 88 \text{ zile}}{365,2 \text{ zile} - 88 \text{ zile}} \approx 40,6 \text{ zile};$$

$$\beta_P = \omega_P t = \frac{2\pi}{T_P} t \approx 40^\circ; \quad \beta_M = \omega_M t = \frac{2\pi}{T_M} t \approx 166^\circ.$$

2) În acord cu desenul din figura alăturată, pentru planeta Venus, rezultă:

$$\beta_V = 360^\circ + 90^\circ - \alpha_{\max, \text{Est}} + \beta_P - (90^\circ - \alpha_{\max, \text{Est}});$$

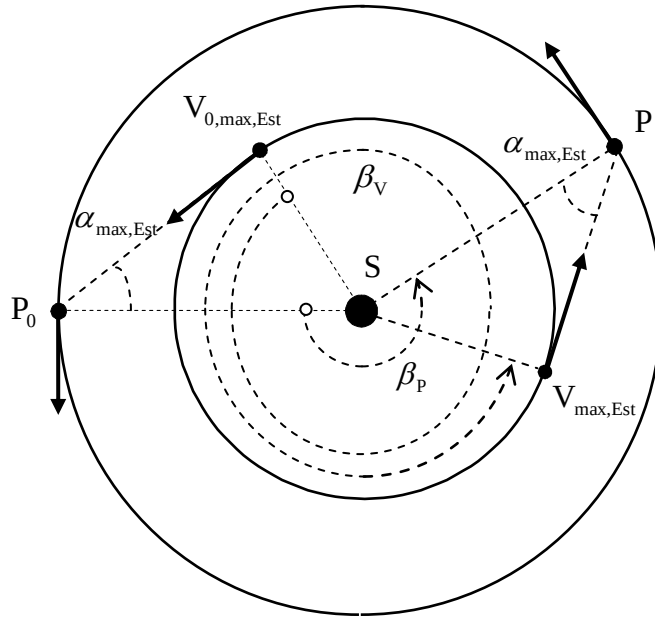
$$\beta_V = 360^\circ + \beta_P; \quad (\omega_V - \omega_P)t = 360^\circ;$$

$$2\pi \cdot \frac{T_P - T_V}{T_P T_V} \cdot t = 360^\circ;$$

$$t = \frac{T_P T_V}{T_P - T_V} = \frac{365,2 \text{ zile} \cdot 234,7 \text{ zile}}{365,2 \text{ zile} - 234,7 \text{ zile}} \approx 656,8 \text{ zile};$$

$$\beta_P = \omega_P t = \frac{2\pi}{T_P} t \approx 647,4^\circ \approx 360^\circ + 287^\circ;$$

$$\beta_V = \omega_V t = \frac{2\pi}{T_V} t \approx 1007,4^\circ \approx 2 \cdot 360^\circ + 287^\circ = 360^\circ + \beta_P.$$

**Fig.**

Asemănător, pentru planeta Mercur, rezultă:

$$t = \frac{T_p T_M}{T_p - T_M} = \frac{365,2 \text{ zile} \cdot 88 \text{ zile}}{365,2 \text{ zile} - 88 \text{ zile}} \approx 116 \text{ zile};$$

$$\beta_p = \omega_p t = \frac{2\pi}{T_p} t \approx 114,3^\circ;$$

$$\beta_M = \omega_M t = \frac{2\pi}{T_M} t \approx 474,5^\circ = 360^\circ + 114,5^\circ \approx 360^\circ + \beta_p.$$

b) Analizând datele înscrise în tabelul din enunțul problemei constatăm că cele două elongații unghiulare maxime, pentru fiecare dintre planetele Mercur și Venus, sunt și variabile în timp și diferite una față de cealaltă, $\alpha_{\max, \text{Est}} \neq \alpha_{\max, \text{Vest}}$. Însemnează că orbitele celor două planete (Mercur și Venus), sunt elipse, având Soarele în unul din focare. Se precizează în enunțul problemei că orbita Pământului este circulară.

Deoarece orbitele lui Mercur și Venus nu diferă foarte mult de cercuri, vom considera că pozițiile celor două planete, aflate la elongațiile unghiulare maxime estice sau vestice, se află, cu aproximație, așa cum indică desenul din figura alăturată, unde orbita Pământului în jurul Soarelui este circulară.

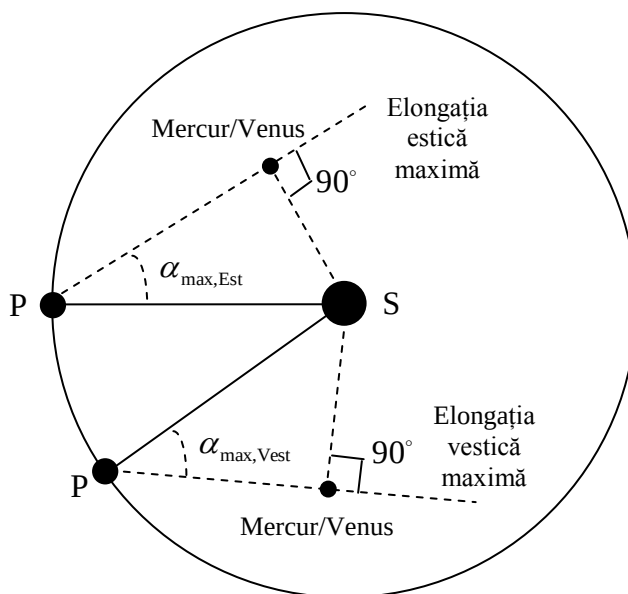


Fig.

Pentru orbita circulară a Pământului, $r_p = 1 \text{ UA}$, în desenele din figurile alăturate, s-au desenat două cercuri cu razele de 5,5 cm. Folosind informațiile numerice din tabelul dat în enunțul problemei, având la dispoziție un raportor și o riglă și utilizând metoda descrisă anterior, în cele două desene sunt prezentate pozițiile aproximative ale planetelor Mercur și respectiv Venus.

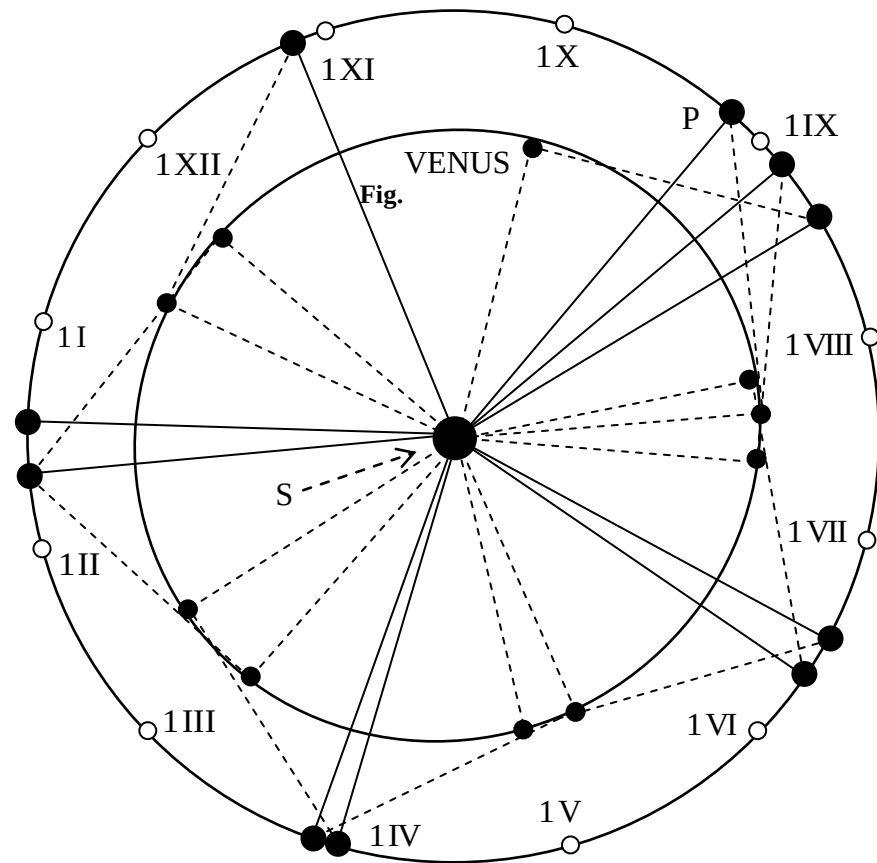
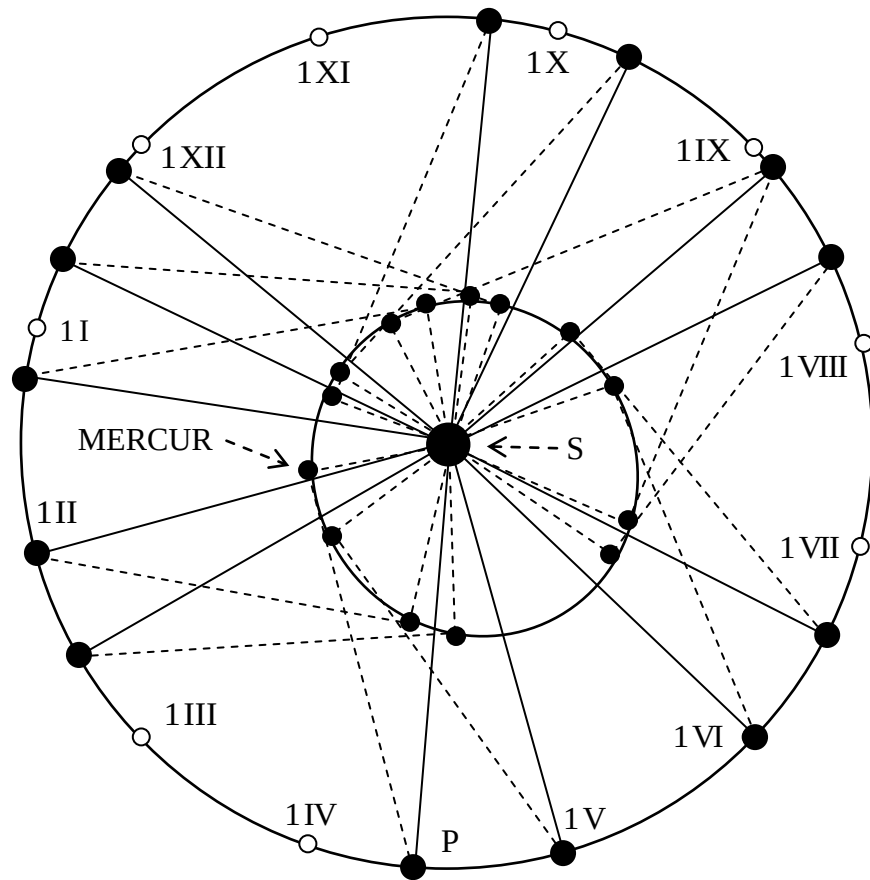


Fig.

Din măsurători făcute pe desenul în care sunt prezentate pozițiile planetei Mercur, rezultă valorile numerice înscrise în tabelul alăturat.

Numărul determinării	Segmentul M – S d_{MS} (cm)	Distanța Mercur – Soare r_M (UA)	Distanța medie Mercur - Soare
1	1,7	0,30	
2	1,8	0,32	
3	1,9	0,34	
4	2,3	0,41	
5	2,4	0,43	0,360 UA
6	2,5	0,45	
7	2,4	0,43	
8	2,2	0,40	
9	2,0	0,36	
10	1,9	0,34	
11	1,8	0,32	
12	1,7	0,30	
13	1,6	0,29	

Din măsurători făcute pe desenul în care sunt prezentate pozițiile planetei Venus, rezultă valorile numerice înscrise în tabelul alăturat.

Numărul determinării	Segmentul V – S d_{VS} (cm)	Distanța Mercur – Soare r_V (UA)	Distanța medie Venus - Soare
1	3,9	0,70	
2	4,1	0,74	
3	4,2	0,76	
4	4,1	0,74	0,718 UA
5	3,9	0,70	
6	3,8	0,69	
7	4,0	0,72	
8	4,1	0,74	
9	3,9	0,70	
10	3,8	0,69	

c) Valorile extreme ale elongațiilor unghiulare maxime se realizează, în cazul orbitelor eliptice, atunci când pozițiile relative ale planetelor sunt cele prezentate în desenul din figura alăturată.

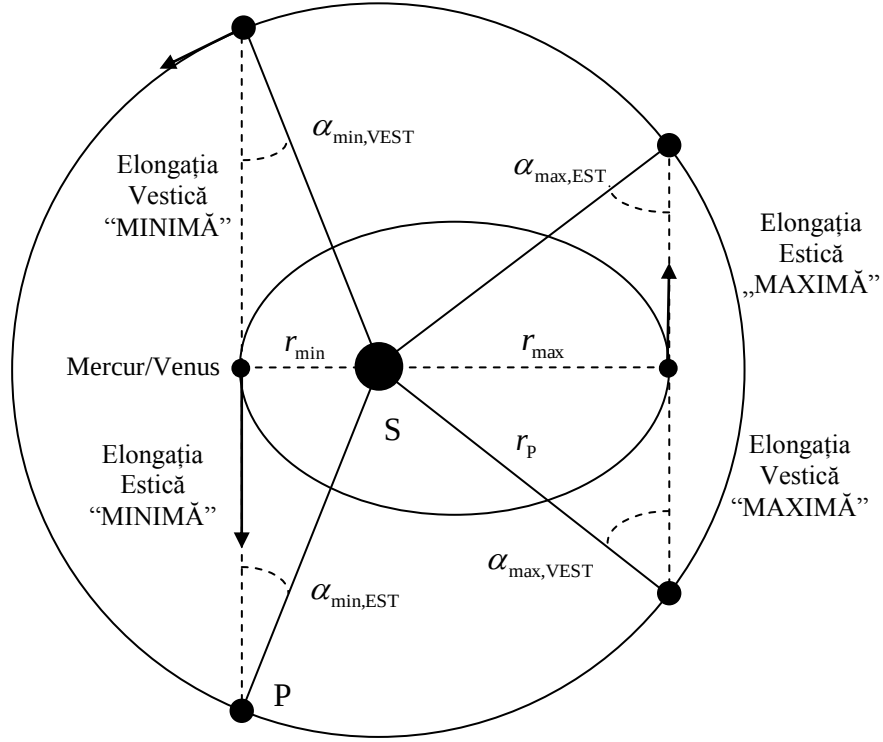


Fig.

În aceste condiții, rezultă:
- pentru planeta Mercur:

$$\sin \alpha_{\min, \text{EST}, \text{Mercur}} = \frac{r_{\min, \text{Mercur}}}{r_p} = \sin 18^\circ \approx 0,309;$$

$$r_{\min, \text{Mercur}} = 0,309 \cdot r_p = 0,309 \text{ UA};$$

$$\sin \alpha_{\max, \text{VEST}, \text{Mercur}} = \frac{r_{\max, \text{Mercur}}}{r_p} = \sin 28^\circ \approx 0,469;$$

$$r_{\max, \text{Mercur}} = 0,469 \cdot r_p = 0,469 \text{ UA};$$

$$a_{\text{Mercur}} = \frac{r_{\min, \text{Mercur}} + r_{\max, \text{Mercur}}}{2} = 0,389 \text{ UA};$$

$$e_{\text{Mercur}} = \frac{r_{\max, \text{Mercur}} - r_{\min, \text{Mercur}}}{r_{\min, \text{Mercur}} + r_{\max, \text{Mercur}}} \approx 0,020;$$

$$e_{\text{Mercur}} = \sqrt{1 - \frac{b_{\text{Mercur}}^2}{a_{\text{Mercur}}^2}};$$

$$b_{\text{Mercur}} = a_{\text{Mercur}} \sqrt{1 - e_{\text{Mercur}}^2} \approx 0,388 \text{ UA};$$

- pentru planeta Venus:

$$\sin \alpha_{\min, \text{EST}, \text{Venus}} = \frac{r_{\min, \text{Venus}}}{r_p} = \sin 45^\circ \approx 0,707;$$

$$r_{\min, \text{Venus}} = 0,707 \cdot r_p = 0,707 \text{ UA};$$

$$\sin \alpha_{\max, \text{VEST}, \text{Venus}} = \frac{r_{\max, \text{Venus}}}{r_p} = \sin 48^\circ \approx 0,743;$$

$$r_{\max, \text{Venus}} = 0,743 \cdot r_p = 0,743 \text{ UA};$$

$$a_{\text{Venus}} = \frac{r_{\min, \text{Venus}} + r_{\max, \text{Venus}}}{2} = 0,725 \text{ UA};$$

$$e_{\text{Venus}} = \frac{r_{\max, \text{Venus}} - r_{\min, \text{Venus}}}{r_{\min, \text{Venus}} + r_{\max, \text{Venus}}} \approx 0,024;$$

$$e_{\text{Venus}} = \sqrt{1 - \frac{b_{\text{Venus}}^2}{a_{\text{Venus}}^2}};$$

$$b_{\text{Venus}} = a_{\text{Venus}} \sqrt{1 - e_{\text{Venus}}^2} \approx 0,724 \text{ UA}.$$

Problema 3

Marea Opoziție. În ziua de 28 august 2003, la ora 17^h56^{min} TU, s-a produs ultima Mare Opoziție a lui Marte, când Pământul a trecut printre Marte și Soare, aliniindu-se cu aceștia, atunci când distanța dintre Pământ și Marte a avut valoarea minimă posibilă. Următoarea Mare Opoziție a lui Marte se va produce în anul 2018. Cineva nu înțelege aspectul distinct al Marii Opoziții și consideră că în anul 2018 se va produce o Opoziție Simplă (trecerea Pământului printre Marte și Soare, aliniindu-se cu aceștia) și nu o Mare Opoziție.

a) *Să se determine* parametrii orbitei circulare ai unei planete ipotetice, “Marte 2”, care în anul 2018 se va afla într-o Opoziție Simplă cu Soarele față de Pământ. Orbita Pământului în jurul Soarelui este circulară.

b) *Să se estimeze* magnitudinea aparentă a lui “Marte 2” văzut de pe Pământ, pe durata Opoziției sale, în anul 2018. Se știe că magnitudinea vizuală aparentă a lui Marte în timpul Marii Opoziții din 2003 a fost $m_{M,2003} = -2^m$. Caracteristicile fizice ale lui “Marte 2” sunt aceleași cu cele ale lui Marte.

c) Tabelul de mai jos prezintă o listă a tuturor Opozițiilor lui Marte din 1955 și până în 2037. *Să se identifice* Opozițiile produse în apropierea Periheliului, Opozițiile produse în apropierea Apheliului și Marile Opoziții, *precizându-se* criteriul utilizat pentru identificare.

Opozițiile lui Marte, 1955 - 2037		
Data Opoziției	Data apropierei maxime	Distanța minimă dintre Pământ și Marte (UA/milioane mile)
12 Februarie 1995	11 Februarie 1995	0,67569/62,8
17 Martie 1997	20 Martie 1997	0,65938/61,3
24 Aprilie 1999	01 Mai 1999	0,57846/53,8
13 Iunie 2001	21 Iunie 2001	0,45017/41,8
28 August 2003	27 August 2003	0,37272/34,6
07 Noiembrie 2005	30 Octombrie 2005	0,46406/43,1
24 Decembrie 2007	18 Decembrie 2007	0,58935/54,8
29 Ianuarie 2010	27 Ianuarie 2010	0,66398/61,7
03 Martie 2012	05 Martie 2012	0,67368/62,6
08 Aprilie 2014	14 Aprilie 2014	0,61756/57,4
22 Mai 2016	30 Mai 2016	0,50321/46,8
27 Iulie 2018	31 Iulie 2018	0,38496/35,8
13 Octombrie 2020	06 Octombrie 2020	0,41492/38,6
08 Decembrie 2022	01 Decembrie 2022	0,54447/50,6
16 Ianuarie 2025	12 Ianuarie 2025	0,64228/59,7
19 Februarie 2027	20 Februarie 2027	0,67792/63,0
25 Martie 2029	29 Martie 2029	0,64722/60,2
04 Mai 2031	12 Mai 2031	0,55336/51,4
27 Iunie 2033	05 Iulie 2033	0,42302/39,3

15 Septembrie 2035
19 Noiembrie 2037

11 Septembrie 2035
11 Noiembrie 2037

0,38041/35,4
0,49358/45,9

d) Să se determine raportul dintre paralaxa diurnă orizontală ecuatorială a Soarelui (p_{es}) și paralaxa diurnă orizontală ecuatorială a lui Marte (p_{eM}).

Se cunosc: perioada mișcării orbitale a lui Marte, $T_M = 780$ zile; perioada mișcării orbitale a Pământului, $T_p = 365$ zile; excentricitatea numerică a orbitei lui Marte, $e = 0,093$.

REZOLVARE

Generalități

În desenul din figura alăturată sunt reprezentate traiectoriile planetelor Pământ, Venus (planetă interioară) și Marte (planetă exterioară), considerate cercuri coplanare, concentrice, având Soarele în centru.

Se numește *perioadă de revoluție siderală*, T_{sid} , a unei planete, intervalul de timp după care planeta respectivă revine într-o aceeași poziție față de centrul Soarelui, considerat fix.

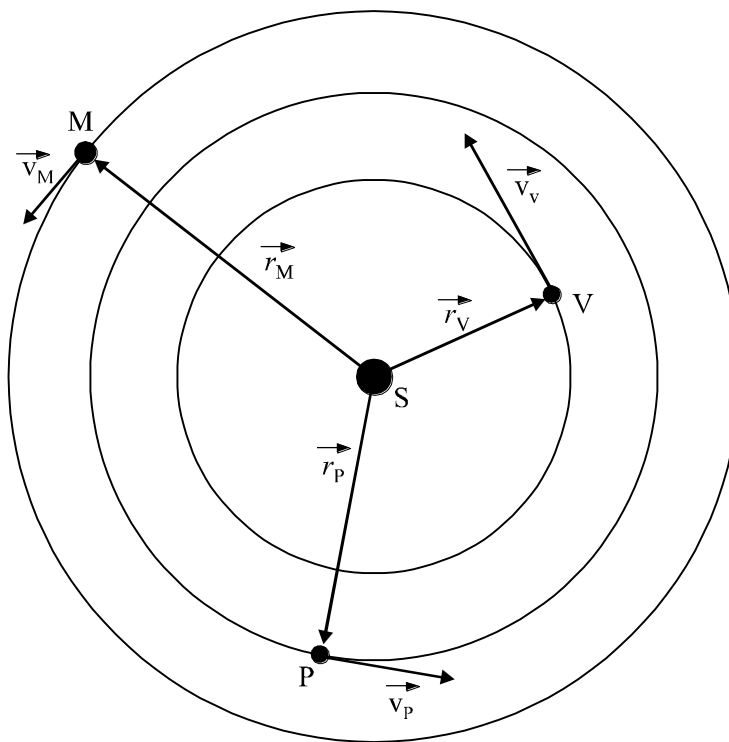


Fig.

Se numește *perioadă de revoluție sinodică*, T_{sin} , a unei planete, intervalul de timp după care planeta respectivă revine într-o aceeași poziție față de centrul Pământului (intervalul de timp dintre două configurații consecutive de același fel ale planetei respective).

Relația dintre perioadele siderală și sinodică pentru o planetă interioară se stabilește utilizând desenul din figura alăturată, din care rezultă:

$$\alpha_V = 2\pi + \alpha_P;$$

$$(\omega_V - \omega_P) T_{\text{sinodic}, V} = 2\pi;$$

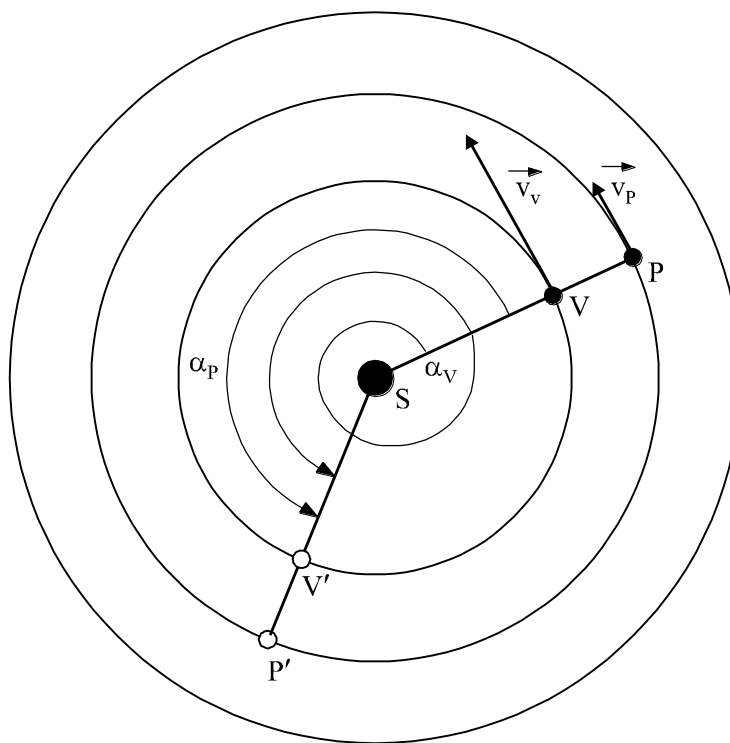


Fig.

$$\frac{2\pi}{T_{\text{sidereal}, V}} - \frac{2\pi}{T_{\text{sidereal}, P}} = \frac{2\pi}{T_{\text{sinodic}, V}};$$

$$\frac{1}{T_{\text{sidereal}, V}} - \frac{1}{T_{\text{sinodic}, V}} = \frac{1}{T_{\text{sidereal}, P}}.$$

Relația dintre perioadele siderală și sinodică pentru o planetă exterioară se stabilește utilizând desenul din figura alăturată, din care rezultă:

$$\alpha_P = 2\pi + \alpha_M;$$

$$(\omega_P - \omega_M) T_{\text{sinodic}, M} = 2\pi;$$

$$\frac{2\pi}{T_{\text{sidereal}, P}} - \frac{2\pi}{T_{\text{sidereal}, M}} = \frac{2\pi}{T_{\text{sinodic}, M}};$$

$$\frac{1}{T_{\text{sidereal}, M}} + \frac{1}{T_{\text{sinodic}, M}} = \frac{1}{T_{\text{sidereal}, P}}.$$

Cele două relații stabilite reprezintă *ecuațiile mișcărilor sinodice* ale planetelor.

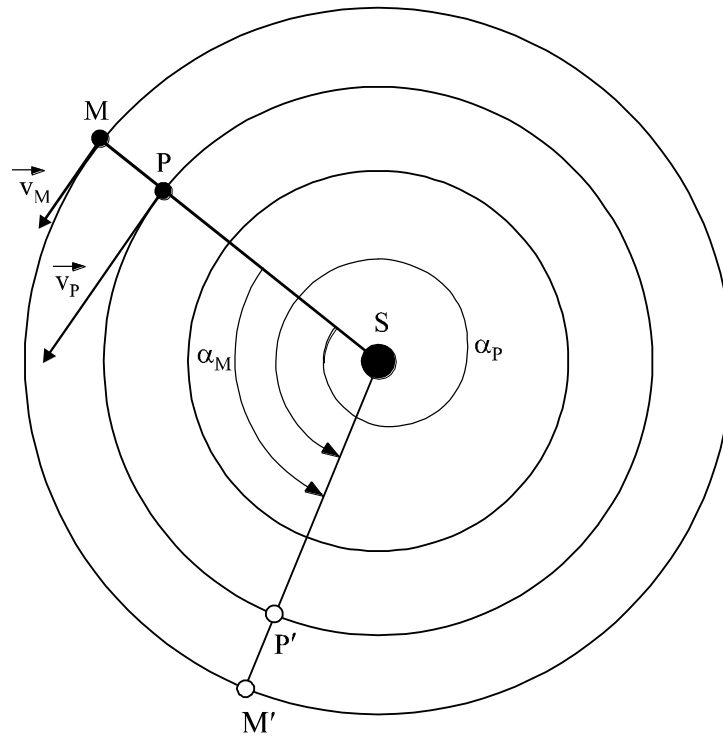


Fig.

Fie punctele M și M' de pe conturul unei elipse, simetrice față de axa mică a elipsei, așa cum indică desenul din figura alăturată.

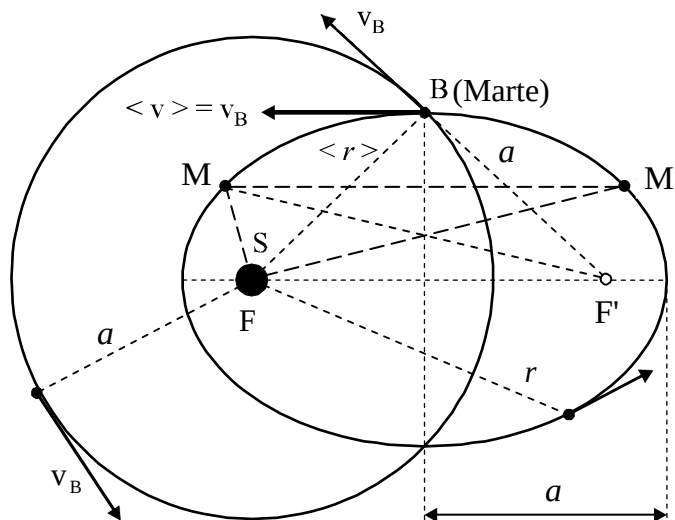


Fig.

Se știe că suma distanțelor de la un punct oarecare M de pe conturul elipsei și până la cele două focare, F și respectiv F', ale elipsei este egală cu axa mare a elipsei:

$$MF + MF' = 2a.$$

Distanțele medii de la focarul F până la toate punctele de pe conturul elipsei se pot calcula prin însumarea distanțelor de la focarul F până la toate perechile de puncte simetrice, adică:

$$\sum_1^n (FM + FM'),$$

în care, ținând seama de simetria punctelor M și M' față de axa mică a elipsei, $FM' = MF$, astfel încât media spațială a distanței de la focarul F până la orice punct M de pe elipsă este:

$$\langle FM \rangle = \frac{\sum_1^n (FM + FM')}{2n} = \frac{\sum_1^n (MF + MF')}{2n} = \frac{2an}{2n} = a = \langle r \rangle.$$

Cu acest rezultat, distanța r , din legea a treia a lui Kepler poate fi apreciată ca o medie a geometriei orbitei și nu ca o medie a dinamicii orbitei.

Concluzie: mișcarea planetei Marte, în jurul Soarelui, pe elipsa cu semiaxa mare a_M , este echivalentă cu mișcarea lui Marte în jurul Soarelui, pe cercul cu raza a_M , așa cum indică desenul din figura alăturată, unde este reprezentată și orbita Pământului în jurul Soarelui, pe un cerc cu raza a_p .

Această echivalență permite să se stabilească intervalul de timp dintre două Opoziții Simple succesive ale lui Marte, reprezentând perioada sinodică a lui Marte (intervalul de timp după care Pământul trece din nou printre Marte și Soare, aliniindu-se cu aceștia).

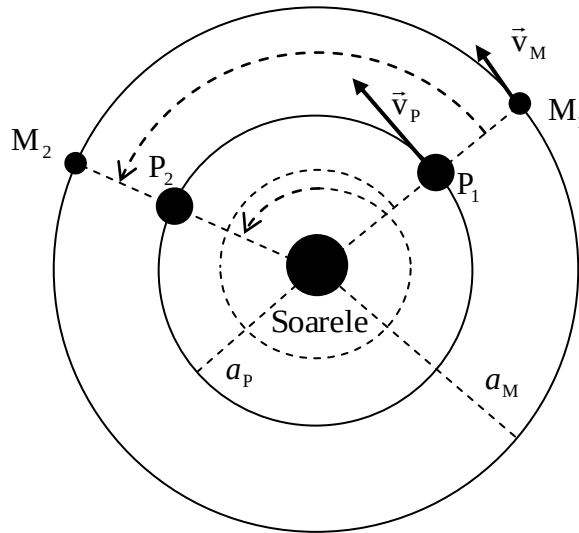


Fig.

Rezultă:

$$\frac{1}{T_{\text{sinodic},M}} = \frac{1}{T_{\text{sideral},P}} - \frac{1}{T_{\text{sideral},M}};$$

$$T_{\text{sinodic,M}} = \frac{T_{\text{sideral,M}} \cdot T_{\text{sideral,P}}}{T_{\text{sideral,M}} - T_{\text{sideral,P}}} = \frac{T_M \cdot T_P}{T_M - T_P};$$

$$\frac{T_M^2}{a_M^3} = \frac{T_P^2}{a_P^3}; T_M = T_P \sqrt{\left(\frac{a_M}{a_P}\right)^3};$$

$$a_P = 1 \text{ UA}; a_M = 1,524 \text{ UA}; T_P = 1 \text{ an};$$

$$T_{\text{sinodic,M}} = T_P \frac{\sqrt{\left(\frac{a_M}{a_P}\right)^3}}{\sqrt{\left(\frac{a_M}{a_P}\right)^3} - 1} \approx 2,14 \text{ ani} = 2 \text{ ani } 50 \text{ zile},$$

reprezentând intervalul de timp dintre două Opoziții Simple consecutive ale planetei Marte.

Deoarece perioada orbitală a Pământului este mai mică decât perioada orbitală a lui Marte, Pământul trece printre Marte și Soare, aliniindu-se cu acestea, în medie la fiecare 780 zile, ceea ce înseamnă 2 ani și 50 zile. De fiecare dată, în aceste situații, spunem că Marte este în Opoziție cu Soarele, față de Pământ. Privite de pe Pământ, Marte și Soarele se află pe sfera cerească în poziții diametral opuse (în constelații diametral opuse).

Rezolvare

a) În enunțul problemei se propune echivalența Marii Opoziții a lui Marte din anul 2018, cu Opoziția Simplă a unei planete ipotetice, “Marte 2”, care ar evolua în jurul Soarelui pe o orbită circulară. Dacă următoarea Opoziție a lui “Marte 2” va fi în vara anului 2018, la 15 ani după Marea Opoziție a lui Marte din anul 2003, înseamnă că perioada sinodică a lui „Marte 2” (timpul după care “Marte 2” revine în aceeași poziție față de centrul Pământului) este $T_{\text{sinodic,M 2}} = 15 \text{ ani}$.

Perioada siderală a Pământului fiind $T_{\text{sideral,P}} = 1 \text{ an}$, rezultă:

$$\frac{1}{T_{\text{sinodic,M 2}}} = \frac{1}{T_{\text{sideral,P}}} - \frac{1}{T_{\text{sideral,M 2}}};$$

$$T_{\text{sideral,M 2}} = \frac{T_{\text{sideral,P}} \cdot T_{\text{sinodic,M 2}}}{T_{\text{sinodic,M 2}} - T_{\text{sideral,P}}} = \frac{1 \text{ an} \cdot 15 \text{ ani}}{15 \text{ ani} - 1 \text{ an}} = 1,07 \text{ ani}.$$

În acord cu legea a treia a lui Kepler, scrisă pentru „Marte 2” și pentru Pământ, în acord cu notațiile din figura alăturată, rezultă:

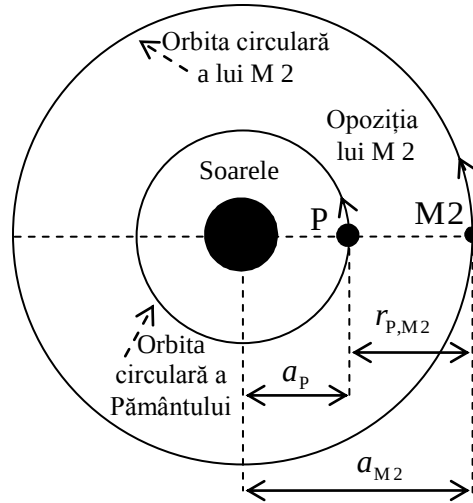


Fig.

$$\left(\frac{T_{\text{sideral},M2}}{T_{\text{sideral},P}} \right)^2 = \left(\frac{a_{M2}}{a_P} \right)^3;$$

$$a_{M2} = a_P \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_{\text{sideral},M2}}{T_{\text{sideral},P}} \right)^2} \approx 1,047 \text{ UA},$$

reprezentând raza orbitei circulare a planetei ipotetice “Marte 2”;

$$r_{P,M2} = a_{M2} - a_P = 0,047 \text{ UA},$$

reprezentând distanța dintre Pământ și “Marte 2”, la momentul opoziției din anul 2018;

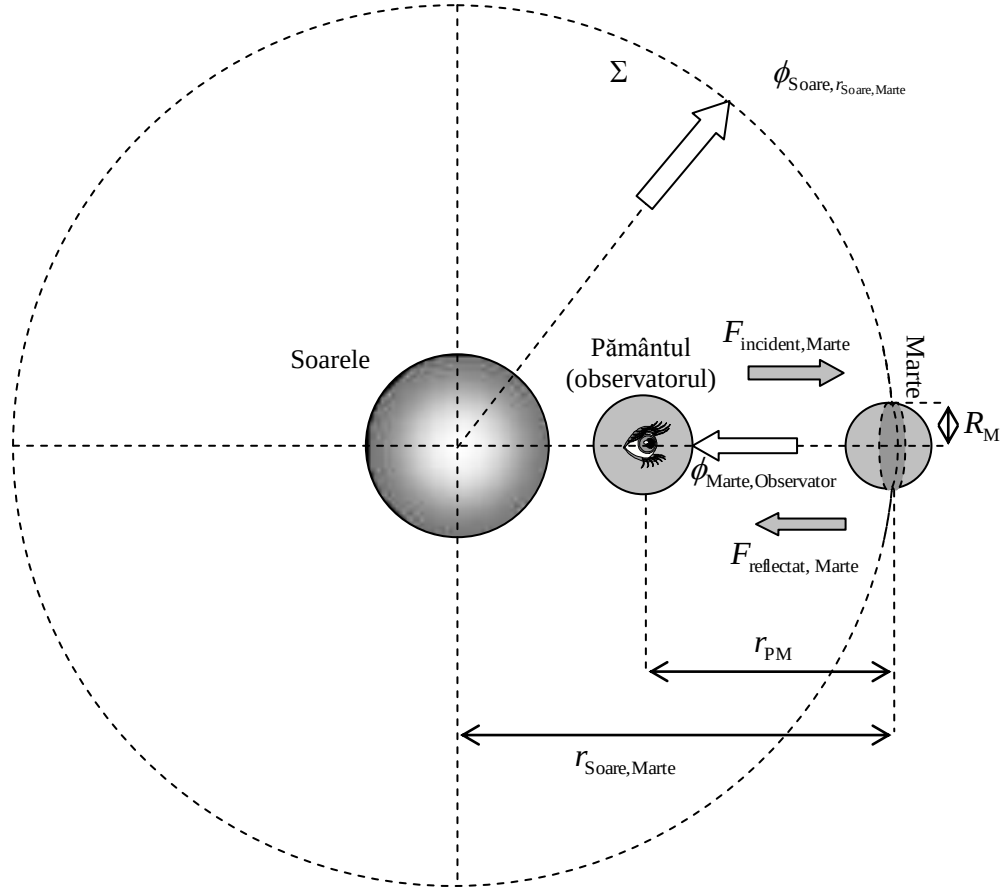
$$\frac{a_M}{a_{M2}} = \frac{1,524 \text{ UA}}{1,047 \text{ UA}} = \frac{r_{S,M}}{r_{S,M2}} \approx 1,46,$$

reprezentând raportul distanțelor Soare – Marte și respectiv Soare – “Marte 2”, ceea ce înseamnă că, la opoziția din 2018, “Marte 2” este mai aproape de Soare, comparativ cu Marte, de 1,46 ori;

$$\frac{r_{P,M}}{r_{P,M2}} = \frac{a_M - a_P}{r_{P,M2}} = \frac{1,524 \text{ UA} - 1 \text{ UA}}{0,047 \text{ UA}} = \frac{0,524}{0,047} \approx 11,15,$$

reprezentând raportul distanțelor Pământ – Marte și respectiv Pământ – „Marte 2”, corespunzătoare opozițiilor, ceea ce înseamnă că, la opoziția din 2018, ipoteticul “Marte 2” este mai aproape de Pământ, comparativ cu Marte, de 11,15 ori, atunci când magnitudinea aparentă a lui Marte este $m_{M,2003} = -2,0^m$.

b) În desenul din figura alăturată este prezentată sfera circumsolară, a cărei rază este egală cu distanța dintre Marte și Soare în momentul producerii Marii Opoziții.

**Fig.**

Densitatea fluxului energetic al Soarelui, la distanța $r_{\text{Soare, Marte}}$ (energia tuturor radiațiilor emise de Soare, care, la distanța respectivă, traversează unitatea de arie a unei suprafețe, sub incidență normală, în unitatea de timp, adică:

$$\phi_{\text{Soare}, r_{\text{S, M}}} = \frac{L_S}{4\pi r_{\text{SM}}^2},$$

unde L_S – luminozitatea Soarelui (energia radiației totale emisă de Soare în unitatea de timp, pe toată suprafața sa, pe toate lungimile de undă, pe toate direcțiile).

Semisfera lui Marte, expusă radiațiilor solare, este echivalentă cu un disc plan circular, având raza R_M și aria suprafeței πR_M^2 , așezat perpendicular pe direcția Soare – Marte, astfel încât *fluxul* radiațiilor solare incidente, la nivelul lui Marte, este:

$$F_{\text{incident, Marte}} = \phi_{\text{Soare}, r_{\text{S, M}}} \cdot \pi R_M^2.$$

Dacă α_M este albedoul lui Marte, atunci fluxul radiațiilor reflectate de Marte, este:

$$F_{\text{reflectat, Marte}} = \alpha_M \cdot F_{\text{incident, Marte}} = \alpha_M \cdot \phi_{\text{Soare}, r_{\text{S, M}}} \cdot \pi R_M^2.$$

În consecință, densitatea fluxului energetic ajuns la Pământ (Observator), după reflexia pe suprafața lui Marte, este:

$$\phi_{\text{Marte, Pamant}} = \phi_{\text{Marte, Observator}} = \frac{F_{\text{reflectat, Marte}}}{2\pi r_{\text{PM}}^2} = \alpha_M \cdot \phi_{\text{Soare}, r_{\text{S, M}}} \cdot \frac{\pi R_M^2}{2\pi r_{\text{PM}}^2};$$

$$\phi_{\text{Marte, Observator}} = \alpha_M \cdot \frac{L_S}{4\pi_{S,M}^2} \cdot \frac{\pi R_M^2}{2\pi_{P,M}^2}.$$

Asemănător, dacă se analizează Opoziția lui “Marte 2”, obținem:

$$\phi_{\text{Soare}, r_{S,M2}} = \frac{L_S}{4\pi_{S,M2}^2}; F_{\text{incident, Marte 2}} = \phi_{\text{Soare}, r_{S,M2}} \cdot \pi R_{M2}^2;$$

$$F_{\text{reflectat, Marte 2}} = \alpha_{M2} \cdot F_{\text{incident, Marte 2}} = \alpha_{M2} \cdot \phi_{\text{Soare}, r_{S,M}} \cdot \pi R_{M2}^2;$$

$$\phi_{\text{Marte 2, Pamant}} = \phi_{\text{Marte 2, Observator}} = \frac{F_{\text{reflectat, Marte 2}}}{2\pi_{P,M2}^2} = \alpha_{M2} \cdot \phi_{\text{Soare}, r_{S,M2}} \cdot \frac{\pi R_{M2}^2}{2\pi_{P,M2}^2},$$

$$\phi_{\text{Marte 2, Observator}} = \alpha_{M2} \cdot \frac{L_S}{4\pi_{S,M2}^2} \cdot \frac{\pi R_{M2}^2}{2\pi_{P,M2}^2},$$

reprezentând densitatea fluxului energetic ajuns la Pământ (Observator), după reflexia pe suprafața lui “Marte 2”.

În acord cu formula lui Pogson, rezultă:

$$\log \frac{\phi_{\text{Marte, Observator}}}{\phi_{\text{Marte 2, Observator}}} = -0,4(m_M - m_{M2});$$

$$\log \frac{\alpha_M \cdot \frac{L_S}{4\pi_{S,M}^2} \cdot \frac{\pi R_M^2}{2\pi_{P,M}^2}}{\alpha_{M2} \cdot \frac{L_S}{4\pi_{S,M2}^2} \cdot \frac{\pi R_{M2}^2}{2\pi_{P,M2}^2}} = -0,4(m_M - m_{M2});$$

$$\alpha_M = \alpha_{M2}; R_M = R_{M2};$$

$$\log \frac{\frac{1}{r_{S,M}^2} \cdot \frac{1}{r_{P,M}^2}}{\frac{1}{r_{S,M2}^2} \cdot \frac{1}{r_{P,M2}^2}} = -0,4(m_M - m_{M2});$$

$$\log \left(\frac{r_{S,M2}}{r_{S,M}} \cdot \frac{r_{P,M2}}{r_{P,M}} \right)^2 = -0,4(m_M - m_{M2});$$

$$2 \cdot \log \left(\frac{r_{S,M2}}{r_{S,M}} \cdot \frac{r_{P,M2}}{r_{P,M}} \right) = -0,4(m_M - m_{M2});$$

$$5 \cdot \log \left(\frac{r_{S,M}}{r_{S,M2}} \cdot \frac{r_{P,M}}{r_{P,M2}} \right) = (m_M - m_{M2});$$

$$5 \cdot \log(1,46 \cdot 11,15) = (m_M - m_{M2});$$

$$m_M - m_{M2} \approx 6^m; m_M = -2^m;$$

$$m_{M2} = -8^m,$$

reprezentând magnitudinea aparentă a planetei “Marte 2”, văzută de pe Pământ.

c) Dacă orbita lui Marte ar fi circulară, așa cum este orbita Pământului, atunci Pământul și Marte s-ar afla permanent la aceleași distanțe față de Soare, iar distanța dintre Pământ și Marte, la orice Opoziție, ar fi aceeași, egală cu diferența razelor celor două orbite.

Dar orbita lui Marte nu este un cerc, ci o elipsă, așa cum indică desenul din figura alăturată, având excentricitatea 0,093, ceea ce presupune că distanța dintre Marte și Soare variază.

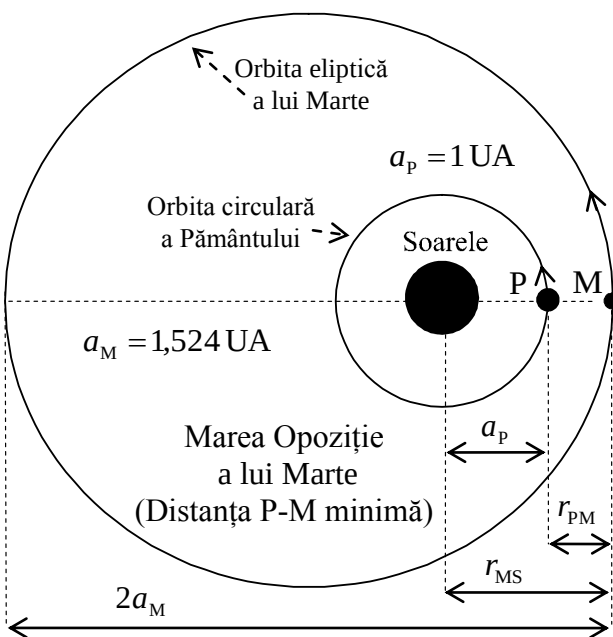


Fig.

În desenul din figura alăturată sunt prezentate orbitele și pozițiile relative ale Pământului și a lui Marte în raport cu Soarele, corespunzătoare tuturor Opozițiilor succesive dintre anii 1995 – 2020, evidențiind Opozițiile din apropierea Periheliului din anii 1998 și 2003. Pentru fiecare Opoziție, pe aliniamentul Soare – Pământ – Marte, este notată distanța dintre Pământ și Marte.

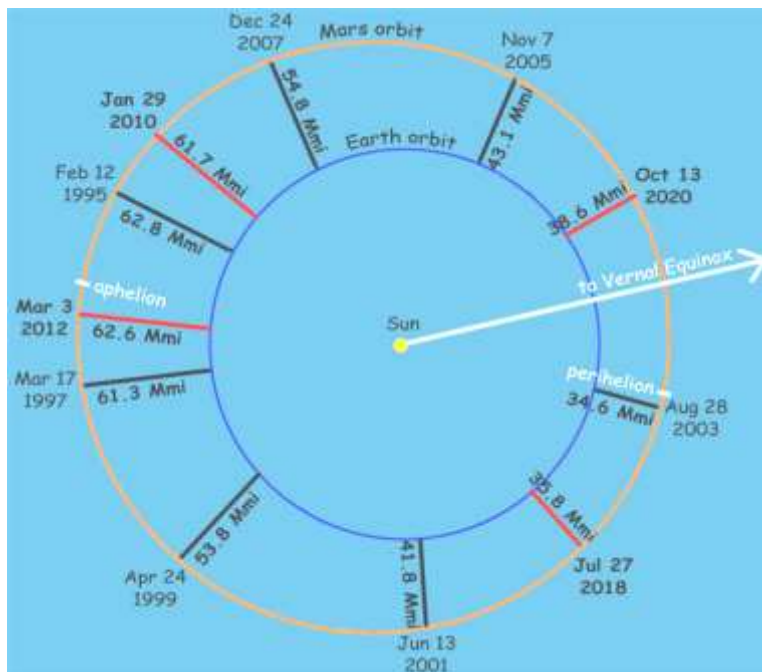


Fig.

În general, la Opoziții, distanța dintre Pământ și Marte scade, atunci când Opozițiile se întâmplă din ce în ce mai aproape de Periheliu, iar distanța dintre Pământ și Marte crește, atunci când Opozițiile se întâmplă din ce în ce mai aproape de Apheliu.

Atunci când Opoziția lui Marte se întâmplă la Periheliul orbitei sale, sau foarte aproape de acesta, avem de a face cu o Mare Opoziție a lui Marte, așa cum indică desenul din figura alăturată, distanța dintre Pământ și Marte fiind minimă posibilă (60 milioane km). Așa s-a întâmplat la 28 August 2003, aceasta fiind ultima Mare Opoziție a lui Marte.

Atunci când Opoziția lui Marte se întâmplă la Apheliul orbitei sale, sau foarte aproape de acesta, distanța dintre Pământ și Marte este maximă posibilă (100 milioane km).

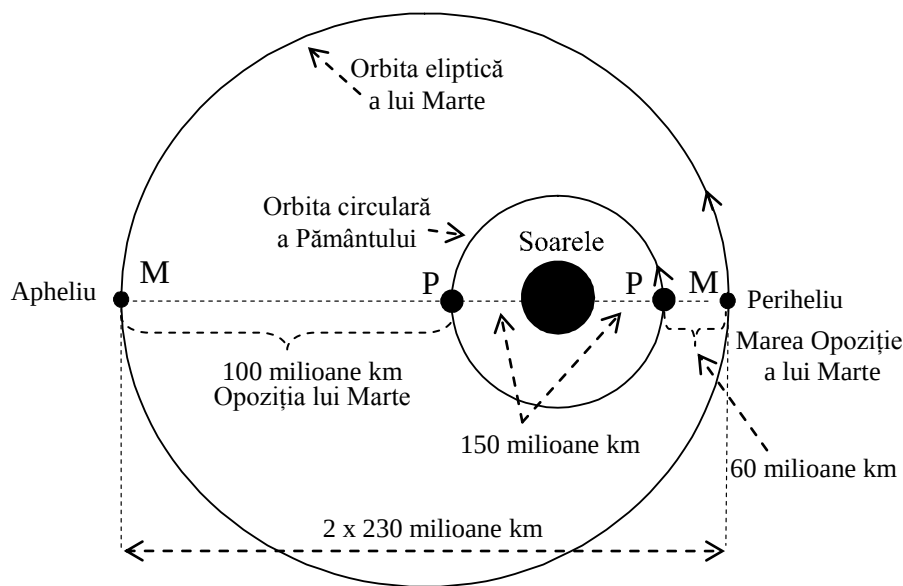


Fig.

Perioada sinodică a lui Marte fiind aproximativ 2 ani și 2 luni, la fiecare Opoziție (după fiecare perioadă sinodică) pe Marte îl vom găsi din ce în ce mai departe de-a lungul orbitei sale, dar din ce în ce mai departe și de Pământ. Dacă la Opoziția din 2003, Marte era aproape de Periheliu, la următoarele Opoziții, Marte se va afla din ce în ce mai departe de Periheliu, apropiindu-se de Apheliu, așa cum s-a întâmplat la opozițiile din 2010 și 2012. Apoi, Marte va evolua, Opozițiile succedându-se din ce în ce mai aproape de Periheliu. Astfel, după 7 sau 8 perioade sinodice, adică după 15 sau 17 ani, Opoziția lui Marte se va produce din nou în apropierea Periheliului.

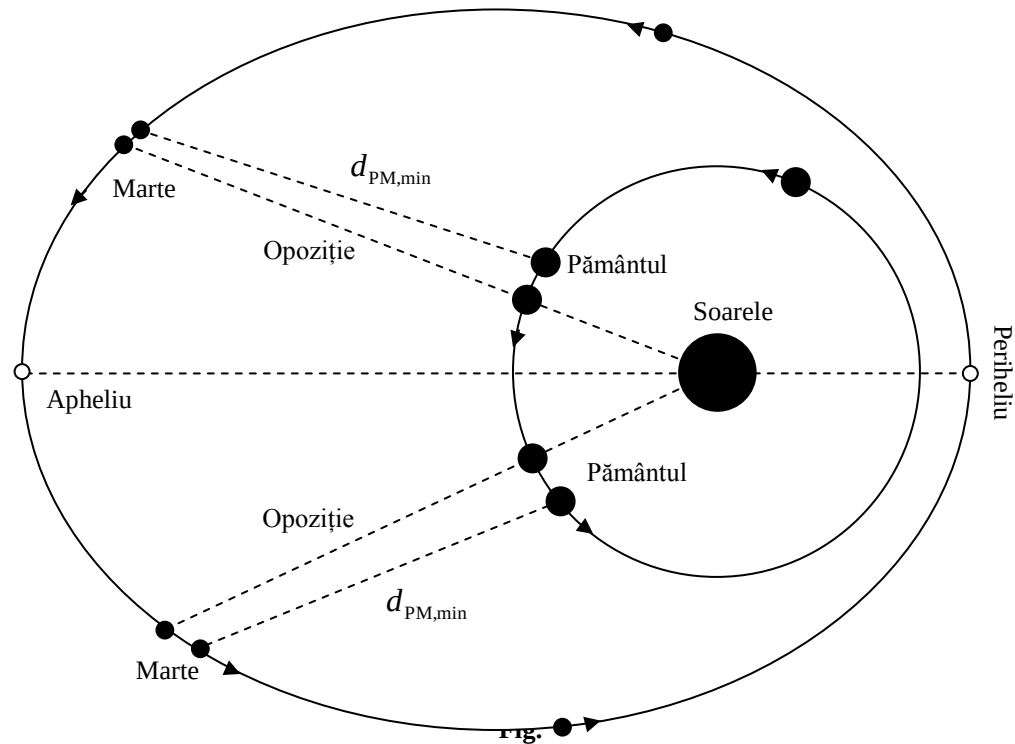
Când Marte se apropie de Periheliu și deplasarea lui este mai rapidă, Pământului îi trebuie mai mult timp ca să-l prindă din urmă, astfel încât Opozițiile sunt mai depărate în timp decât în mod normal. Când Marte se apropie de Apheliu și deplasarea sa este mai lentă, Pământului îi trebuie mai puțin timp ca să-l prindă din urmă, astfel încât Opozițiile sunt mai apropiate în timp decât în mod normal.

Tabelul de mai jos prezintă o listă a tuturor Opozițiilor lui Marte din 1955 și până în 2037. Din acest tabel rezultă că Pământul este relativ apropiat de Marte în anii 2001 și 2005, iar în 2003 Pământul este foarte aproape de Marte. Apoi, în anii 2020 și 2033, Pământul va fi din nou relativ apropiat de Marte, iar în anii 2018 și 2035 Pământul va fi din nou foarte aproape de Marte, ca și în 2003.

Opozițiile lui Marte, 1995 - 2037		
Data Opoziției	Data apropiierii maxime	Distanța minimă (UA/milioane mile)
12 Februarie 1995	11 Februarie 1995	0,67569/62,8
17 Martie 1997	20 Martie 1997	0,65938/61,3
24 Aprilie 1999	01 Mai 1999	0,57846/53,8
13 Iunie 2001	21 Iunie 2001	0,45017/41,8
28 August 2003	27 August 2003	0,37272/34,6
07 Noiembrie 2005	30 Octombrie 2005	0,46406/43,1
24 Decembrie 2007	18 Decembrie 2007	0,58935/54,8
29 Ianuarie 2010	27 Ianuarie 2010	0,66398/61,7
03 Martie 2012	05 Martie 2012	0,67368/62,6
08 Aprilie 2014	14 Aprilie 2014	0,61756/57,4
22 Mai 2016	30 Mai 2016	0,50321/46,8
27 Iulie 2018	31 Iulie 2018	0,38496/35,8
13 Octombrie 2020	06 Octombrie 2020	0,41492/38,6
08 Decembrie 2022	01 Decembrie 2022	0,54447/50,6
16 Ianuarie 2025	12 Ianuarie 2025	0,64228/59,7
19 Februarie 2027	20 Februarie 2027	0,67792/63,0
25 Martie 2029	29 Martie 2029	0,64722/60,2
04 Mai 2031	12 Mai 2031	0,55336/51,4
27 Iunie 2033	05 Iulie 2033	0,42302/39,3
15 Septembrie 2035	11 Septembrie 2035	0,38041/35,4
19 Noiembrie 2037	11 Noiembrie 2037	0,49358/45,9

În tabel sunt indicate două date: **data Opoziției**, când Pământul trece printre Marte și Soare, aliniindu-se cu aceștia; **data apropiierii maxime** dintre Pământ și Marte, care este cu câteva zile mai devreme decât **data Opoziției**, când Marte se depărtează de Soare (apropiindu-se de Apheliu) și cu câteva zile mai târziu decât **data Opoziției**, când Marte se apropie de Soare (apropiindu-se de Periheliu), așa cum ilustrează desenul din figura alăturată.

Dacă data Opoziției este foarte aproape de Periheliu, atunci data apropiierii maxime este aproximativ aceeași cu data Opoziției (așa cum s-a întâmplat în 2003). Pământul trece mai aproape de Marte, dacă data Opoziției este mai apropiată de Periheliu, așa cum se va întâmpla în anii 2018 și 2035.



Identificările Opozițiilor

- Opozițiile marcate cu **BOLD ITALIC** se produc atunci când distanța dintre Pământ și Marte este minimă, ceea ce se întâmplă când Marte este la Periheliu sau foarte aproape de acesta.
- Opozițiile marcate cu **BOLD DREPT** se produc atunci când distanța dintre Pământ și Marte este mică, ceea ce se întâmplă când Marte este în apropierea Periheliului.
- Opozițiile pentru care distanțele dintre Pământ și Marte sunt maxime se produc atunci când Marte este la Apheliului.
- Opozițiile pentru care distanțele dintre Pământ și Marte sunt apropiate de valorile maxime se produc atunci când Marte este aproape de Apheliul orbitei sale.

d) Pentru că paralaxa diurnă orizontală a Soarelui este foarte mică, ea se poate determina apeleând la paralaxa diurnă orizontală cunoscută a planetei Marte (planetă apropiată de Pământ într-un moment căruia îi corespunde „Marea Opoziție“ a planetei Marte, când, așa cum indică figura alăturată, planeta Marte se află la periheliul orbitei sale eliptice în raport cu Soarele (a_M – semiaxa mare a elipsei), de aceeași parte cu Pământul, a cărui orbită în jurul Soarelui se consideră circulară ($r_{TS} = a_T$).

Opoziția planetei Marte

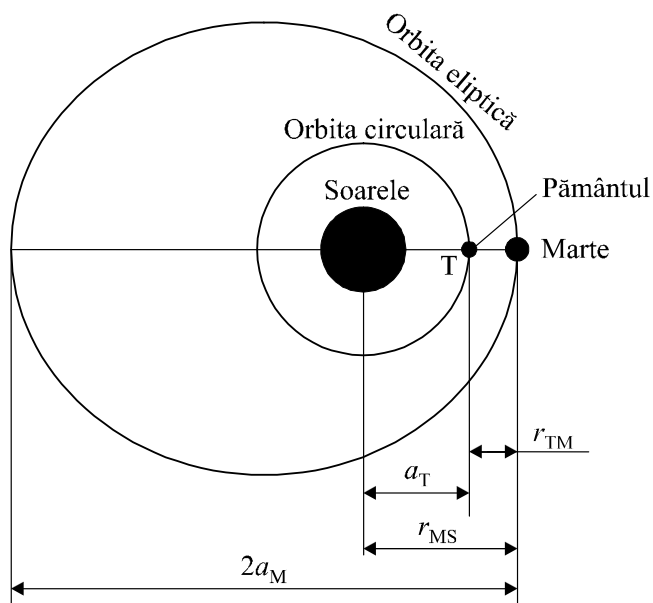


Fig. 148

Din studiul mișcării unui punct material sub acțiunea forței centrale gravitaționale se știe că, atunci când, în evoluția sa pe o elipsă, având Soarele în unul din focare, planeta trece prin periheliul orbitei, ea se află, față de Soare, la distanța minimă:

$$r_{\min} = r_{MS} = a_M (1 - e),$$

unde e este excentricitatea numerică a elipsei.

În aceste condiții rezultă:

$$r_{TM} = r_{MS} - r_{TS};$$

$$r_{TM} = a_M (1 - e) - a_T.$$

Utilizând figura alăturată și definiția paralaxei diurne orizontale a unui astru, rezultă:

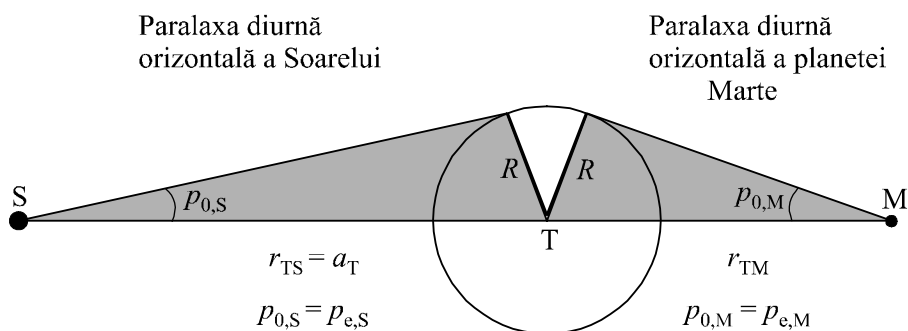


Fig.

$$\sin p_{0,S} \approx p_{0,S} = \frac{R}{r_{TS}} = \frac{R}{a_T};$$

$$\sin p_{0, M} \approx p_{0, M} = \frac{R}{r_{TM}},$$

unde R este raza Pământului considerat sferic;

$$\begin{aligned} R &= a_T p_{0, S} = r_{TM} p_{0, M}; \\ a_T p_{0, S} &= [a_M(1 - e) - a_T] p_{0, M}; \\ p_{0, S} &= \left[\frac{a_M}{a_T}(1 - e) - 1 \right] p_{0, M}; \\ \frac{a_M}{a_T} &= \left(\frac{T_M}{T_T} \right)^{2/3}. \end{aligned}$$

În acord cu legea a III-a a lui Kepler;

$$p_{0, S} = p_{e, S}; p_{0, M} = p_{e, M},$$

deoarece Pământul s-a considerat sferic;

$$p_{e, S} = \left[(1 - e) \left(\frac{T_M}{T_T} \right)^{2/3} - 1 \right] p_{e, M},$$

formulă care permite calculul paralaxei diurne orizontale ecuatoriale a Soarelui, cunoscând paralaxa diurnă orizontală ecuatorială a planetei Marte, perioadele de rotație a Pământului și a planetei Marte în jurul Soarelui și excentricitatea elipsei lui Marte;

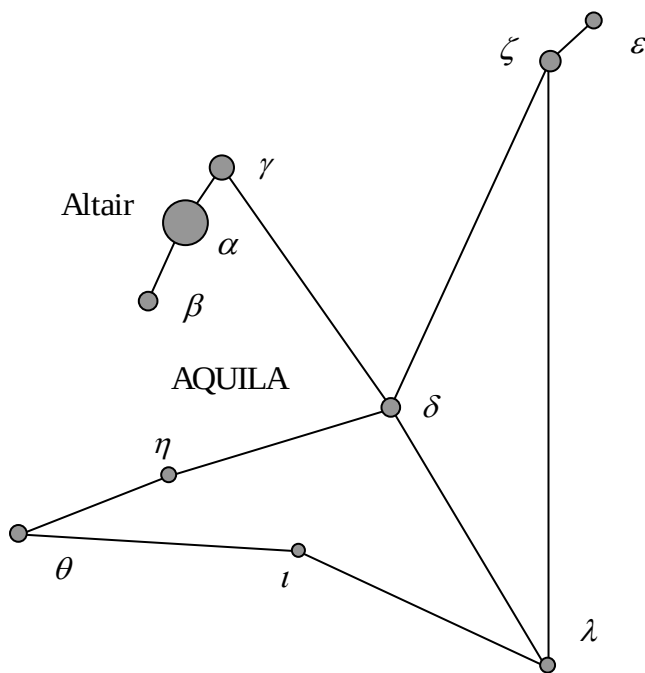
$$\frac{p_{e, S}}{p_{e, M}} = (1 - e) \left(\frac{T_M}{T_P} \right)^{2/3} - 1 \approx 1,54.$$

Problema 4

A. Steaua Altair și Soarele. Pentru steaua Altair (steaua α din constelația Aquila) se cunosc: paralaxa anuală, $p_0 = 0,198''$; mișcarea proprie, $\mu = 0,658''/\text{an}$; viteza radială, $v_r = -26 \text{ km/s}$; magnitudinea vizuală aparentă, $m_0 = 0,89^m$. Să se determine: intervalul de timp după care distanța dintre steaua Altair și Soare va fi minimă, τ ; distanța minimă dintre steaua Altair și Soare, $r_{\min}$; magnitudinea aparentă a stelei Altair, m , când distanța dintre ea și Soare este minimă.

Rezolvare

În desenul din figura alăturată este evidențiată steaua Altair din constelația Aquila (Vulturul).



În acord cu desenele reprezentate în figura alăturată, rezultă:

$$m = m_0 + 5 \cdot \log \frac{r_{\min}}{r_0};$$

$$m = m_0 + 5 \cdot \log \left(\sqrt{1 - \frac{v_{\text{rad}}^2}{v_{\text{rad}}^2 + (\mu r_0)^2}} \right);$$

$$\tan p_0 = \frac{D}{r_0} \approx p_0; r_0 = \frac{D}{p_0};$$

$$m = m_0 + 5 \cdot \log \frac{\mu r_0}{\sqrt{v_{\text{rad}}^2 + (\mu r_0)^2}};$$

$$m = m_0 + 5 \cdot \log \frac{\frac{\mu D}{p_0}}{\sqrt{v_{\text{rad}}^2 + \left(\frac{\mu D}{p_0} \right)^2}};$$

$$p_0 = 0,198'' = 0,198 \cdot \frac{3,14}{180 \cdot 60 \cdot 60} \text{ rad} \approx 10^{-6} \text{ rad};$$

$$\mu = 0,658''/\text{an} = 0,658 \cdot \frac{3,14}{180 \cdot 60 \cdot 60} \cdot \frac{\text{rad}}{365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} \approx 10^{-13} \frac{\text{rad}}{\text{s}};$$

$$\frac{\mu D}{p_0} = 15 \frac{\text{km}}{\text{s}} = v_{\text{tg}};$$

$$D = 1 \text{ UA} \approx 150000000 \text{ km};$$

$$v_r = -26 \frac{\text{km}}{\text{s}};$$

$$\log \frac{\frac{\mu D}{p_0}}{\sqrt{v_{\text{rad}}^2 + \left(\frac{\mu D}{p_0} \right)^2}} = \log \frac{15 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{\sqrt{\left(-26 \frac{\text{km}}{\text{s}} \right)^2 + \left(15 \frac{\text{km}}{\text{s}} \right)^2}} = \log \frac{15}{\sqrt{676 + 225}} \approx -0,3;$$

$$m = m_0 + 5^{\text{m}} \cdot (0,3) = 0,89^{\text{m}} - 1,5^{\text{m}} = -0,61^{\text{m}};$$

$$\frac{r_{\min}}{r_0} = \sqrt{1 - \frac{v_{\text{rad}}^2}{v_{\text{rad}}^2 + (\mu r_0)^2}};$$

$$r_0 = \frac{D}{p_0} = \frac{15 \cdot 10^7 \text{ km}}{10^{-6}} = 15 \cdot 10^{13};$$

$$r_{\min} = r_0 \cdot \frac{v_{\text{tg}}}{\sqrt{v_{\text{rad}}^2 + v_{\text{tg}}^2}} = 15 \cdot 10^{13} \text{ km} \cdot \frac{1}{2} = 7,5 \cdot 10^{13} \text{ km};$$

$$r_0 - r_{\min} = v_{\text{rad}} \tau;$$

$$\tau = \frac{r_0 - r_{\min}}{v_{\text{rad}}} \approx 3 \cdot 10^{12} \text{ s} \approx 95130 \text{ ani.}$$

B. Încălzirea apei din bazin. Să se estimeze creșterea temperaturii apei dintr-un bazin de înot normal cu dimensiunile $(50 \times 20 \times 2)\text{m}$, dacă bazinul ar putea colecta toată energia pe care astronomii cercetători ai stelelor au primit-o de la stele, făcând observații noaptea pe telescoape optice, pentru a obține informații despre structura Universului.

Se cunosc: pentru Soare, corepunzător magnitudinii aparente, $m_s = -26,8^m$, constanta iradierii solare, $k_{\text{Soare}} = 1,37 \text{ kW/m}^2$; căldura specifică a apei, $c = 4200 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$; aria suprafeței de lucru a tuturor telescoapelor profesionale, $S = 1000 \text{ m}^2$; timpul total de lucru, $t = 3 \cdot 10^8$ secunde; magnitudinea obiectelor observate cu telescopul, $m \approx 1^m$; eficiența energetică a dispozitivelor utilizate, $\eta = 10\%$.

Rezolvare

Constanta solară reprezintă energia sosită de la Soare, pe o suprafață cu aria de 1 unitate, așezată perpendicular pe direcția razelor solare, în unitatea de timp.

În acord cu formula lui Pogson scrisă pentru Soare și pentru o stea oarecare, σ , rezultă:

$$\log \frac{E_s}{E_\sigma} = -0,4(m_s - m_\sigma),$$

unde: E_s – iluminarea Soarelui (energia primită de la Soare de o suprafață cu aria de 1 unitate, așezată perpendicular pe razele solare, în unitatea de timp; constanta iradierii solare, $k_s = E_s$); E_σ – iluminarea stelei σ (energia primită de la steaua σ de o suprafață cu aria de 1 unitate, așezată perpendicular pe razele stelare, în unitatea de timp; constanta iradierii stelare, $k_\sigma = E_\sigma$); m_s – magnitudinea aparentă a Soarelui; m_σ – magnitudinea aparentă a stelei;

$$2,5 \cdot \log \frac{E_s}{E_\sigma} = m_\sigma - m_s;$$

$$\log \frac{E_s}{E_\sigma} = \frac{m_\sigma - m_s}{2,5} = \log 10^{(m_\sigma - m_s)/2,5};$$

$$\frac{E_s}{E_\sigma} = 10^{(m_\sigma - m_s)/2,5}; E_\sigma = E_s \cdot 10^{-(m_\sigma - m_s)/2,5};$$

$$k_\sigma = k_s \cdot 10^{-(m_\sigma - m_s)/2,5}; k_s = 1,37 \text{ kW/m}^2;$$

$$m_\sigma = 1^m; m_s = -26,8^m; k_\sigma \approx 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

În aceste condiții, energia totală primită de la steaua σ este:

$$W_{\text{total}} = k_\sigma \cdot S \cdot t = 10^{-8} \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \cdot 1000 \text{ m}^2 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ s} = 3000 \text{ J},$$

din care, cu eficiență energetică:

$$W = \eta \cdot W_{\text{total}} = 300 \text{ J}.$$

Masa apei din bazin este:

$$M = \rho V = 2 \cdot 10^6 \text{ kg}.$$

Rezultă:

$$Mc\Delta\theta = W; \Delta\theta = \frac{W}{Mc} = \frac{300 \text{ J}}{2 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} \approx 3,5 \cdot 10^{-8} \text{ K}.$$

C. Magnitudinea aparentă a Soarelui. Admițând că radiațiile stelelor sunt radiațiile unor corpuri negre, utilizând informațiile din tabelul alăturat, *să se determine* magnitudinea vizuală aparentă a Soarelui.

Nr. crt.	Denumirea stelei	Diametrul unghiular al stelei (δ_{stea})	Temperatura absolută a suprafeței stelei (T_{stea})	Magnitudinea aparentă a stelei (m_{stea})	Magnitudinea aparentă a Soarelui (m_{Soare})
1	Betelgeuse	0",047	3200 K	0,4 ^m	?
2	Aldebaran	0",020	3800 K	0,9 ^m	?
3	Arcturus	0",020	4300 K	-0,04 ^m	?
4	Herculis	0",030	2650 K	3,15 ^m	?
5	Ceti Mira	0",056	2400 K	3,04 ^m	?
6	Antares	0",040	3100 K	0,88 ^m	?
7	Soarele	32'	6000 K	?	?

Rezolvare

În acord cu legea lui Stefan – Boltzmann, radianța unui corp negru (stea), adică energia totală, corespunzătoare tuturor lungimilor de undă, emisă în unitatea de timp de o suprafață a acestuia cu aria de o unitate, de o singură parte a suprafeței respective, este direct proporțională cu puterea a patra a temperaturii sale absolute, adică:

$$Q_{\text{stea}} = \frac{E_{\text{emis,stea}}}{tS_{\text{stea}}} = \sigma T_{\text{stea}}^4,$$

unde σ este o constantă.

În aceste condiții, energia emisă de întreaga suprafață a stelei, în unitatea de timp, este:

$$P_{\text{emis,stea}} = 4\pi R_{\text{stea}}^2 \cdot Q_{\text{stea}} = 4\pi \sigma R_{\text{stea}}^2 T_{\text{stea}}^4;$$

$$\frac{E_{\text{emis,stea}}}{t} = P_{\text{emis,stea}}; \sigma T_{\text{stea}}^4 = \frac{P_{\text{emis,stea}}}{4\pi R_{\text{stea}}^2};$$

$$P_{\text{emis,stea}} = \sigma T_{\text{stea}}^4 4\pi R_{\text{stea}}^2,$$

astfel încât, densitatea fluxului energetic al stelei, la distanța $r_{\text{Pământ, stea}}$ față de aceasta, înseamnă energia tuturor radiațiilor emise de stea, care traversează unitatea de arie a unei suprafețe de pe Pământ, sub incidență normală, în unitatea de timp, adică:

$$\phi_{\text{stea}, r_{\text{P, stea}}} = \frac{P_{\text{emis,stea}}}{4\pi r_{\text{P, stea}}^2};$$

$$\phi_{\text{stea}, r_{p,\text{stea}}} = \frac{\sigma T_{\text{stea}}^4 4\pi R_{\text{stea}}^2}{4\pi r_{p,\text{stea}}^2} = \frac{\sigma R_{\text{stea}}^2 T_{\text{stea}}^4}{r_{p,\text{stea}}^2}.$$

În particular, pentru Soare, avem:

$$\phi_{\text{Soare}, r_{p,\text{Soare}}} = \frac{\sigma T_{\text{Soare}}^4 4\pi R_{\text{Soare}}^2}{4\pi r_{p,\text{Soare}}^2} = \frac{\sigma R_{\text{Soare}}^2 T_{\text{Soare}}^4}{r_{p,\text{Soare}}^2}.$$

În acord cu formula lui Pogson, rezultă:

$$\begin{aligned} \log \frac{\phi_{\text{Soare}, r_{p,\text{Soare}}}}{\phi_{\text{stea}, r_{p,\text{stea}}}} &= -0,4(m_{\text{Soare}} - m_{\text{stea}}); \\ \log \frac{\frac{\sigma R_{\text{Soare}}^2 T_{\text{Soare}}^4}{r_{p,\text{Soare}}^2}}{\frac{\sigma R_{\text{stea}}^2 T_{\text{stea}}^4}{r_{p,\text{stea}}^2}} &= -0,4(m_{\text{Soare}} - m_{\text{stea}}); \\ \log \frac{\left(\frac{R_{\text{Soare}}}{r_{p,\text{Soare}}}\right)^2 T_{\text{Soare}}^4}{\left(\frac{R_{\text{stea}}}{r_{p,\text{stea}}}\right)^2 T_{\text{stea}}^4} &= -0,4(m_{\text{Soare}} - m_{\text{stea}}); \\ \frac{R_{\text{Soare}}}{r_{p,\text{Soare}}} &= \frac{1}{2} \delta_{\text{Soare}}; \quad \frac{R_{\text{stea}}}{r_{p,\text{stea}}} = \frac{1}{2} \delta_{\text{stea}}; \\ \log \frac{\left(\frac{1}{2} \delta_{\text{Soare}}\right)^2 T_{\text{Soare}}^4}{\left(\frac{1}{2} \delta_{\text{stea}}\right)^2 T_{\text{stea}}^4} &= -0,4(m_{\text{Soare}} - m_{\text{stea}}); \\ \log \frac{\delta_{\text{Soare}}^2 \cdot T_{\text{Soare}}^4}{\delta_{\text{stea}}^2 \cdot T_{\text{stea}}^4} &= -0,4(m_{\text{Soare}} - m_{\text{stea}}); \\ \log \left(\frac{\delta_{\text{Soare}}}{\delta_{\text{stea}}}\right)^2 \left(\frac{T_{\text{Soare}}}{T_{\text{stea}}}\right)^4 &= -0,4(m_{\text{Soare}} - m_{\text{stea}}); \\ 2 \log \frac{\delta_{\text{Soare}}}{\delta_{\text{stea}}} + 4 \log \frac{T_{\text{Soare}}}{T_{\text{stea}}} &= -0,4(m_{\text{Soare}} - m_{\text{stea}}); \\ \log \frac{\delta_{\text{Soare}}}{\delta_{\text{stea}}} + 2 \log \frac{T_{\text{Soare}}}{T_{\text{stea}}} &= -\frac{1}{5}(m_{\text{Soare}} - m_{\text{stea}}); \\ \log \frac{\delta_{\text{Soare}}}{\delta_{\text{stea}}} + 2 \log \frac{T_{\text{Soare}}}{T_{\text{stea}}} &= \frac{1}{5}(m_{\text{stea}} - m_{\text{Soare}}); \\ m_{\text{Soare}} &= m_{\text{stea}} - 5 \cdot \log \frac{\delta_{\text{Soare}}}{\delta_{\text{stea}}} - 10 \cdot \log \frac{T_{\text{Soare}}}{T_{\text{stea}}}. \end{aligned}$$

Rezultatele determinărilor sunt prezentate în tabelele alăturate.

Nr. crt.	Denumirea stelei	Diametrul unghiular al stelei (δ_{stea})	Temperatura absolută a suprafeței stelei (T_{stea})	Magnitudinea aparentă a stelei (m_{stea})	Magnitudinea aparentă a Soarelui (m_{Soare})
1	Betelgeuse	0",047	3200 K	0,4 ^m	?
2	Aldebaran	0",020	3800 K	0,9 ^m	?
3	Arcturus	0",020	4300 K	−0,04 ^m	?
4	Herculis	0",030	2650 K	3,15 ^m	?
5	Ceti Mira	0",056	2400 K	3,04 ^m	?
6	Antares	0",040	3100 K	0,88 ^m	?
7	Soarele	32'=1920'	6000 K	?	?

Nr. crt.	Denumirea stelei	$\log \frac{\delta_{\text{Soare}}}{\delta_{\text{stea}}}$	$\log \frac{T_{\text{Soare}}}{T_{\text{stea}}}$	m_{stea}	m_{Soare}
1	Betelgeuse	4,611	0,273	0,4 ^m	−25,385 ^m
2	Aldebaran	4,982	0,198	0,9 ^m	−25,99 ^m
3	Arcturus	4,982	0,144	−0,04 ^m	−26,39 ^m
4	Herculis	4,806	0,354	3,15 ^m	−24,42 ^m
5	Ceti Mira	4,535	0,397	3,04 ^m	−23,605 ^m
6	Antares	4,681	0,286	0,88 ^m	−25,385 ^m

$$\overline{m}_{\text{Soare}} = -25,195^{\text{m}}.$$