

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, București, 7 aprilie 2015

CLASA a VIII-a

Problema 1. Arătați că pentru orice numere reale $a, b, c > 0$ cu $a + b + c = 3$ are loc inegalitatea:

$$2(ab + bc + ca) - 3abc \geq a\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} + b\sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}} + c\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Problema 2. Fie $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă triunghiulară. Se consideră punctele $D \in (AA')$, $E \in (BB')$ și $F \in (CC')$ astfel încât planele (AEF) și $(DB'C')$ să fie paralele. Demonstrați că planele $(A'EF)$ și (DBC) sunt paralele.

Problema 3. Se notează cu $p(a)$ prima cifră a numărului natural a . Arătați că fiecare dintre mulțimile

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid p(5^n) - p(2^n) > 0\} \quad \text{și} \quad B = \{n \in \mathbb{N} \mid p(5^n) - p(2^n) < 0\}$$

conține o infinitate de elemente.

Problema 4. Într-un tetraedru regulat $ABCD$ se construiesc plane paralele la fețele tetraedrului, astfel încât fiecare muchie este împărțită în 6 segmente congruente. Aceste plane determină pe fețele, muchiile și în interiorul tetraedrului o mulțime de 80 de puncte de intersecție, notată V .

Determinați numărul maxim de elemente ale unei submulțimi W a mulțimii $V \cup \{A, B, C, D\}$ care are proprietatea:

oricare trei puncte distincte din W sunt necoliniare, iar planul determinat de acestea nu este paralel cu niciuna dintre fețele tetraedrului $ABCD$.