



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Craiova, 11 aprilie 2023

CLASA a XII-a – Subiecte

Problema 1. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit de ordinul $n \in \mathbb{N}^*$, unde $n \geq 2$. Vom spune că grupul $(G, \cdot)$ este aranjabil dacă există o ordonare a elementelor sale, astfel încât

$$G = \{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n\} = \{a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, \dots, a_k \cdot a_{k+1}, \dots, a_n \cdot a_1\}.$$

- Determinați toate numerele naturale nenule n pentru care grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ este aranjabil.
- Dați un exemplu de grup de ordin par care este aranjabil.

Problema 2. Fie p un număr prim, n un număr natural nedivizibil prin p , iar $\mathbb{K}$ un corp comutativ cu p^n elemente, cu elementul unitate $1_{\mathbb{K}}$ și elementul nul $\hat{0} = 0_{\mathbb{K}}$. Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ notăm $\hat{m} = \underbrace{1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + \dots + 1_{\mathbb{K}}}_{\text{de } m \text{ ori}}$ și definim polinomul

$$f_m = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \widehat{C_m^k} X^{p^k} \in \mathbb{K}[X].$$

- Arătați că mulțimea rădăcinilor polinomului f_1 este $\{\hat{k} \mid k \in \{0, 1, \dots, p-1\}\}$.
- Fie $m \in \mathbb{N}^*$ oarecare. Determinați mulțimea rădăcinilor din corpul $\mathbb{K}$ ale polinomului f_m .

Problema 3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, două numere reale oarecare. Spunem că o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea (P) dacă este o funcție integrabilă pe $[a, b]$, cu proprietatea că

$$f(x) - f\left(\frac{x+a}{2}\right) = f\left(\frac{x+b}{2}\right) - f(x) \quad \text{pentru orice } x \in [a, b].$$

Arătați că pentru orice număr real t există o unică funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea (P), astfel încât $\int_a^b f(x) dx = t$.

Problema 4. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție monoton crescătoare, derivabilă, cu derivata continuă, pentru care $f(0) = 0$. Fie $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$g(x) = f(x) + (x-1)f'(x) \quad \text{pentru orice } x \in [0, 1].$$

- Arătați că

$$\int_0^1 g(x) dx = 0.$$

- Demonstrați că pentru orice funcție $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, convexă și derivabilă, cu $\varphi(0) = 0$ și $\varphi(1) = 1$, are loc inegalitatea

$$\int_0^1 g(\varphi(x)) dx \leq 0.$$