



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureș, 20 aprilie 2016
CLASA a 11-a

Subiecte

Problema 1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice care satisface următoarele condiții:
 $\det(A^{2014} - I_2) = \det(A^{2014} + I_2)$ și $\det(A^{2016} - I_2) = \det(A^{2016} + I_2)$.
Demonstrați că $\det(A^n - I_2) = \det(A^n + I_2)$, pentru orice număr natural
nenul n .

Problema 2. Pornind de la o matrice inversabilă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ având liniile
 $L_1, L_2, \dots, L_n$, construim matricele $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu liniile $O, L_2, \dots, L_n$ și
 $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu liniile $L_2, \dots, L_n, O$, unde O desemnează o linie cu toate
elementele nule. Fie matricele $D = A^{-1} \cdot B$ și $E = A^{-1} \cdot C$. Arătați că:

- a) $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^2) = \dots = \text{rang}(D^n)$;
- b) $\text{rang}(E) > \text{rang}(E^2) > \dots > \text{rang}(E^n)$.

Problema 3. Fie $a \in \mathbb{R}$. Considerăm o funcție $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$. Arătați
că următoarele două afirmații sunt echivalente:

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{a+\varepsilon}} = 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{a-\varepsilon}} = \infty$, pentru orice $\varepsilon > 0$;

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = a$.

Problema 4. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că f^2 este
derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $(f^2)' = f$.