

Olimpiada Națională de Matematică, Oradea 20 aprilie 2011
Primul test de selecție pentru seniori — Soluții

Problema 1. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiția

$$2f(x) = f(x+y) + f(x+2y),$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și oricare ar fi $y \geq 0$.

Soluție. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $f(0) = 0$. Fie $y > 0$ și $n \in \mathbb{N}$. Pentru $x = ny$ obținem $2f(ny) = f((n+1)y) + f((n+2)y)$, deci $f(ny) = f(y)(1 - (-2)^n)/3$. În particular, $f(4y) = -5f(y)$. Pe de altă parte, $f(2y) = f(y)(1 - (-2)^2)/3 = -f(y)$, deci $f(4y) = -f(2y) = f(y)$, de unde $f(y) = 0$, oricare ar fi $y \geq 0$.

Fie $x \in \mathbb{R}$. Atunci $2f(x) = f(x+|x|) + f(x+2|x|) = 0$. În concluzie, $f \equiv 0$, deci funcțiile cerute sunt cele constante.

Problema 2. Fie $S = \{\lfloor n\pi \rfloor : n \in \mathbb{N}\}$. Să se arate că:

- (a) Oricare ar fi numărul întreg $m \geq 3$, mulțimea S conține m elemente în progresie aritmetică; și
- (b) Mulțimea S nu conține progresii aritmetice infinite.

Soluție. (a) Fie m un număr întreg mai mare sau egal cu 3. Deoarece mulțimea $\{\{n\pi\} : n \in \mathbb{N}\}$ este densă în $[0, 1]$, există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\{n\pi\} < 1/m$.

Fie $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Atunci

$$\lfloor kn\pi \rfloor = \lfloor k\lfloor n\pi \rfloor + k\{n\pi\} \rfloor = k\lfloor n\pi \rfloor + \lfloor k\{n\pi\} \rfloor = k\lfloor n\pi \rfloor,$$

deci numerele $\lfloor n\pi \rfloor, \lfloor 2n\pi \rfloor, \dots, \lfloor mn\pi \rfloor$ sunt în progresie aritmetică, cu rația $\lfloor n\pi \rfloor$.

(b) Presupunem că S conține o progresie aritmetică infinită, $\lfloor a_n\pi \rfloor$, cu rația r , unde (a_n) este un șir strict crescător de numere naturale. Deci $a_n\pi = \lfloor a_0\pi \rfloor + nr + \{a_n\pi\}$, șir care tinde la infinit. Rezultă că $r \neq 0$ și

$$a_{n+1} - a_n = \frac{r + \{a_{n+1}\pi\} - \{a_n\pi\}}{\pi} \in \left(\frac{r-1}{\pi}, \frac{r+1}{\pi} \right),$$

interval care conține cel mult un număr natural, deoarece lungimea lui este strict mai mică decât 1. Prin urmare, există un număr natural k , astfel încât $a_{n+1} - a_n = k$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Întrucât $a_n = a_0 + nk$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/n) = k$. Dar $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/n) = r/\pi$, deci $k = r/\pi$ — contradicție.

Problema 3. Fie ABC un triunghi în care $AB < AC$. Mediatoarea laturii BC intersectează latura AC în punctul D . Bisectoarea unghiului ADB intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctul E . Să se arate că bisectoarea unghiului AEB este perpendiculară pe dreapta determinată de centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ADE , respectiv BDE .

Soluție. Dreptele BC și DE sunt paralele, deci unghiurile BED și DAE sunt congruente. Prin urmare, unghiurile AED și DBE sunt congruente. Fie I și J centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ADE , respectiv BDE . Rezultă că triunghiurile DIE și DJB sunt asemenea, deci $DI/DE = DJ/DB$. Deoarece unghiurile IDJ și EDB sunt congruente, rezultă că triunghiurile DIJ și DEB sunt asemenea, deci unghiurile DIJ și DEB sunt congruente. Fie F punctul de intersecție a dreptelor BE și IJ . Cum patrulaterul $DIEF$ este inscriptibil, rezultă că unghiurile EFI și EDI sunt congruente, cu măsura $\hat{C}/2$, deci dreapta IJ este paralelă cu bisectoarea exterioară a unghiului AEB , de unde rezultă concluzia.

Problema 4. Fie n un număr întreg mai mare sau egal cu 2 și S_n mulțimea permutărilor de ordin n . Dacă σ este o permutare din S_n , notăm cu $\ell(\sigma)$ numărul de cicluri din descompunerea lui σ în cicluri disjuncte. Să se calculeze suma

$$\sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) n^{\ell(\sigma)}.$$

Soluție. Vom deduce o formulă de recurență pentru polinomul

$$f_n(x) = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) x^{\ell(\sigma)}.$$

În acest scop, considerăm descompunerea în cicluri disjuncte a fiecărei permutări $\sigma \in S_n$,

$$\sigma = (\dots) \dots (\dots)(n) \quad \text{sau} \quad \sigma = (\dots) \dots (\dots n \dots) \dots (\dots),$$

și permutarea corespunzătoare $\sigma' \in S_{n-1}$, obținută din σ prin ștergerea lui n ,

$$\sigma' = (\dots) \dots (\dots)(\hat{n}) \quad \text{sau} \quad \sigma = (\dots) \dots (\dots \hat{n} \dots) \dots (\dots).$$

În primul caz, $\text{sgn } \sigma' = \text{sgn } \sigma$ și $\ell(\sigma') = \ell(\sigma) - 1$, iar în al doilea caz, $\text{sgn } \sigma' = -\text{sgn } \sigma$ și $\ell(\sigma') = \ell(\sigma)$.

Invers, dintr-o permutare $\sigma' \in S_{n-1}$, obținem o singură permutare $\sigma \in S_n$ care îl fixează pe n (de primul tip) și exact $n - 1$ permutări $\sigma \in S_n$ care nu îl fixează pe n (de al doilea tip), deoarece n poate fi inserat în $n - 1$ moduri în σ' .

Prin urmare,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= x f_{n-1}(x) - (n-1) f_{n-1}(x) = (x - n + 1) f_{n-1}(x) \\ &= \dots \\ &= (x - n + 1)(x - n + 2) \dots (x - 2) f_2(x) \\ &= (x - n + 1)(x - n + 2) \dots (x - 2)(x - 1)x. \end{aligned}$$

În particular, $f(n) = n!$.