

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Negrești Oaș, 4 aprilie 2018
Subiecte – CLASA a V-a

Problema 1. Determinați numerele prime $a > b > c$ pentru care $a - b$, $b - c$ și $a - c$ sunt numere prime diferite.

Problema 2. Determinați numerele naturale nenule a, b, c pentru care

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{7c+1}{c+1}.$$

Problema 3. Pe o tablă sunt scrise numerele: $1, 2, 3, \dots, 27$. Un *pas* înseamnă ștergerea a trei numere a, b, c de pe tablă și scrierea în locul lor a numărului $a + b + c + n$, unde n este un număr natural nenul fixat. Determinați numărul natural n știind că, după 13 pași, pe tablă este scris numărul n^2 .

Problema 4. Se consideră un număr natural $n \geq 2$ și un pătrat $n \times n$ (vezi figura alăturată). *Diagonala principală* a acestui pătrat este formată din câmpurile hașurate. Completăm câmpurile aflate sub diagonala principală cu zerouri, iar în restul câmpurilor (inclusiv cele hașurate) scriem numere naturale nenule. După completarea tuturor câmpurilor calculăm suma numerelor aflate pe fiecare linie și fiecare coloană, obținând astfel $2n$ sume. Pătratul se numește *norocos* dacă valorile celor $2n$ sume sunt egale, într-o anumită ordine, cu numerele $1, 2, \dots, 2n$.

a) Arătați că, pentru $n = 5$, nu există pătrat norocos.

b) Dacă $n = 4$, determinați cel mai mare număr natural care apare în completarea unui pătrat norocos.

