

Clasa a X-a

1. Să se găsească tripletele (a, b, c) de numere complexe nenule având același modul, care verifică egalitatea

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 1 = 0.$$

2. Se consideră un număr natural $k \geq 1$, numerele prime distincte $p_1, p_2, \dots, p_k$ și $n = p_1 p_2 \dots p_k$. Pentru o funcție $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, notăm $p(f) = f(1)f(2)\dots f(n)$.

a) Să se determine numărul funcțiilor f cu proprietatea că $p(f)$ divide n .

b) Pentru $n = 6$, să se afle numărul funcțiilor f pentru care $p(f)$ divide 36.

3. Să se determine funcțiile $f, g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ care verifică condițiile:

$$f(g(x) + g(y)) = f(g(x)) + y,$$

$$g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + y,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$.

4. Fie A o mulțime finită de numere reale. Considerăm mulțimile

$$S = \{x + y \mid x, y \in A\} \text{ și } D = \{x - y \mid x, y \in A\}.$$

Să se arate că

$$\text{card}(A) \cdot \text{card}(D) \leq (\text{card}(S))^2.$$