

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Timișoara, 20 aprilie 2017

CLASA a 8-a

Problema 1. Demonstrați următoarele afirmații:

- a) Dacă $ABCA'B'C'$ este o prismă dreaptă și $M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (AB)$ sunt astfel încât $A'M$, $B'N$ și $C'P$ sunt perpendiculare două câte două și concurente, atunci prisma $ABCA'B'C'$ este regulată.
- b) Dacă $ABCA'B'C'$ este o prismă regulată și $\frac{AA'}{AB} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, atunci există $M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (AB)$ astfel încât dreptele $A'M$, $B'N$ și $C'P$ să fie perpendiculare două câte două și concurente.

Problema 2. Arătați că pentru orice număr natural $n \geq 3$, există numerele naturale nenule $x_1, x_2, \dots, x_n$, diferite două câte două, astfel încât $\{2, n\} \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ și

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, și $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ numere reale pozitive astfel încât

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \dots \leq \frac{a_n}{b_n}.$$

Determinați cea mai mare valoare a numărului real c pentru care este satisfăcută inegalitatea

$$(a_1 - b_1 c)x_1 + (a_2 - b_2 c)x_2 + \dots + (a_n - b_n c)x_n \geq 0$$

pentru orice $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ cu $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

Problema 4. Fie $a, b, c, d \in [0, 1]$. Demonstrați inegalitatea

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+d} + \frac{d}{1+a} + abcd \leq 3.$$