



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



**Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Craiova, 11 aprilie 2023**

CLASA a XI-a – Subiecte

Problema 1. *Determinați funcțiile de două ori derivabile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația $(f'(x))^2 + f''(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.*

Problema 2. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Arătați că $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ dacă și numai dacă există matricele inversabile $X, Y, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AX + YB = AZB$.*

Problema 3. *Fie un număr natural $n \geq 2$ și matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu proprietatea $A^2B = A$.*

a) *Demonstrați că $(AB - BA)^2 = O_n$.*

b) *Arătați că pentru oricare număr natural $k \leq n/2$ există matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea din enunț astfel încât $\text{rang}(AB - BA) = k$.*

Problema 4. *Considerăm o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care există o funcție derivabilă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și există un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale strict pozitive, convergent la 0, astfel încât*

$$g'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + a_n) - f(x)}{a_n},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) *Dați un exemplu de o astfel de funcție f care nu este derivabilă în niciun punct $x \in \mathbb{R}$.*

b) *Arătați că dacă f este continuă pe $\mathbb{R}$ atunci f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.*