



MINISTERUL EDUCAȚIEI



Societatea de Științe Matematice
din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a IX-a

Problema 1. Fie patrulaterul convex $ABCD$, ale cărui diagonale se intersectează în punctul O . Dacă $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{OC}$, arătați că $ABCD$ este un paralelogram.

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = \frac{1}{2}$ și $2n \cdot a_{n+1} = (n+1)a_n$, oricare ar fi numărul natural nenul n .

a) Stabiliți formula termenului general a_n al șirului, unde n este un număr natural nenul.

b) Dacă $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, arătați că numerele $\{b_n\}$, $\{b_{n+1}\}$ și $\{b_{n+2}\}$ nu pot fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice pentru niciun număr natural nenul n .

(Am notat cu $\{x\}$ partea fracționară a numărului real x .)

Problema 3. Se consideră numărul natural compus n și $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_k = n$ divizorii naturali ai lui n , unde $k \geq 3$. Dacă toate ecuațiile $d_{i+2}x^2 - 2d_{i+1}x + d_i = 0$, unde $i \in \{1, 2, \dots, k-2\}$, au soluții reale, arătați că există un număr prim p astfel încât $n = p^{k-1}$.

Problema 4. Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC și X mijlocul laturii BC . Perpendiculara în H pe HX taie laturile (AB) și (AC) în punctele Y respectiv Z . Notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și cu O' centrul cercului circumscris triunghiului BHC .

a) Arătați că $HY = HZ$.

b) Demonstrați că $\overrightarrow{AY} + \overrightarrow{AZ} = 2\overrightarrow{OO'}$.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.