

Primul test de selecție pentru seniori

1. Fie ABC un triunghi, O centrul cercului circumscris acestui triunghi, A' piciorul perpendicularei duse din punctul A pe BC și $X \in (AA')$. Bisectoarea interioară a unghiului BAC taie cercul circumscris triunghiului ABC a doua oară în punctul D . Fie M mijlocul segmentului DX . Dreapta care trece prin O și este paralelă cu AD intersectează dreapta DX în punctul N . Demonstrați că unghiurile BAM și CAN sunt congruente.
2. Fie ABC un triunghi și fie r raza cercului înscris în acest triunghi. Fie R_A raza cercului tangent interior cercului circumscris triunghiului ABC în punctul A . Analog se definesc R_B și R_C . Arătați că $\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \leq \frac{2}{r}$.
3. Un *triplet pitagoreic* este o soluție a ecuației $x^2 + y^2 = z^2$ în mulțimea numerelor naturale pentru care $x < y$. Fiind dat $n \in \mathbb{N}$, arătați că există un număr întreg pozitiv care apare în exact n triplete pitagoreice distincte.
4. Fie k un întreg pozitiv congruent cu 1 modulo 4 și care nu este pătrat perfect. Fie $a = \frac{1 + \sqrt{k}}{2}$. Arătați că

$$\{\lfloor a^2 n \rfloor - \lfloor a \lfloor an \rfloor \rfloor : n = 1, 2, 3, \dots\} = \{1, \dots, \lfloor a \rfloor\}.$$

5. Fiind dat un număr întreg $N \geq 4$, determinați cea mai mare valoare a sumei

$$\sum_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor + 1} \left(\left\lfloor \frac{n_i}{2} \right\rfloor \right)$$

care poate fi atinsă, unde $k, n_1, \dots, n_k$ sunt alese astfel încât $k \geq 3$, $n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1$, iar $n_1 + \dots + n_k = N$.

Al doilea test de selecție pentru seniori

1. Fie a un număr întreg și n un număr natural nenul. Arătați că suma $\sum_{k=1}^n a^{(k,n)}$ este divizibilă prin n , unde cu (x, y) am notat cel mai mare divizor comun al numerelor întregi x și y .
2. Fie ABC un triunghi și A' centrul cercului determinat de mijlocul laturii BC și de proiecțiile ortogonale ale punctelor B și C pe dreptele suport ale bisectoarelor interioare ale unghiurilor $\sphericalangle ACB$, respectiv $\sphericalangle ABC$; punctele B' și C' sunt definite analog. Demonstrați că cercul Euler al triunghiului ABC și cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$ sunt concentrice.
3. Fie t un număr real pozitiv. Determinați mulțimile A de numere reale care conțin pe t și pentru care există o mulțime B de numere reale, care depinde de A și pentru care $|B| \geq 4$, astfel încât elementele mulțimii $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ să formeze o progresie aritmetică finită.
4. Considerăm laticia $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$, în spațiul euclidian n -dimensional. Se numește *dreaptă* în $\mathbb{Z}^n$ o mulțime de forma

$$a_1 \times \dots \times a_{k-1} \times \mathbb{Z} \times a_{k+1} \times \dots \times a_n,$$

unde $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, iar a_i sunt numere întregi arbitrare.

O submulțime A a mulțimii $\mathbb{Z}^n$ se numește *admisibilă* dacă este nevidă, finită și orice dreaptă din $\mathbb{Z}^n$ care intersectează mulțimea A conține cel puțin două elemente din A .

O submulțime N a lui $\mathbb{Z}^n$ se numește *nulă* dacă este nevidă și orice dreaptă din $\mathbb{Z}^n$ intersectează mulțimea N într-un număr par de puncte (posibil, în niciun punct).

- a) Arătați că orice mulțime admisibilă din $\mathbb{Z}^2$ conține o mulțime nulă.
- b) Găsiți o mulțime admisibilă din $\mathbb{Z}^3$ pentru care nicio submulțime a sa să nu fie nulă.

Al treilea test de selecție pentru seniori

1. Două cercuri, γ și γ' , sunt secante în punctele A și B . Tangenta la cercul γ' în punctul A întâlnește cercul γ a doua oară în punctul C . Tangenta la cercul γ în punctul A întâlnește cercul γ' a doua oară în punctul C' . Dreapta CC' separă punctele A și B .

Fie Γ cercul tangent exterior cercurilor γ și γ' , astfel încât Γ să fie tangent dreptei CC' și să fie situat de aceeași parte față de CC' ca punctul B . Arătați că cercurile γ și γ' interceptează segmente congruente pe una dintre tangentele la cercul Γ în punctul A .

2. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ și $(b_n)_{n \geq 0}$ două șiruri de numere reale astfel încât

$$a_0 > \frac{1}{2}, a_{n+1} \geq a_n \text{ și } b_{n+1} = a_n(b_n + b_{n+2}), \text{ pentru orice numere nenegative } n.$$

Arătați că șirul $(b_n)_{n \geq 0}$ este mărginit.

3. Fie k și n numere întregi pozitive, cu $k \leq n$. Notăm cu $M(n, k)$ cel mai mic multiplu comun al numerelor $n, n-1, \dots, n-k+1$. Fie $f(n)$ cel mai mare număr întreg pozitiv $k \leq n$ pentru care

$$M(n, 1) < M(n, 2) < \dots < M(n, k).$$

Demonstrați că:

- a) $f(n) < 3\sqrt{n}$, pentru orice număr întreg pozitiv n ;
 - b) Dacă N este un întreg pozitiv, atunci $f(n) > N$ pentru orice număr finit de întregi pozitivi n .
4. Fie numerele întregi $h \geq 1$ și $p \geq 2$. Determinați numărul minim de perechi de adversari pe care îi poate avea un parlament de tipul hp , dacă în orice partiționare a parlamentului în h camere cu câte p membri fiecare, unele camere să conțină cel puțin o pereche de adversari.

Al patrulea test de selecție pentru seniori

1. Fie ABC și ABD două triunghiuri coplanare de perimetre egale. Dreptele suport ale bisectoarelor unghiurilor CAD și CBD se intersectează în punctul P . Arătați că unghiurile APC și BPD sunt congruente.
2. Fie numărul întreg $k \geq 2$. Determinați cel mai mare număr de divizori pe care poate să-l aibă coeficientul binomial C_n^k din mulțimea $\{n - k + 1, \dots, n\}$, când n parcurge întregii mai mari sau egali cu k .
3. Fie n un număr întreg pozitiv. Dacă σ este o permutare a primelor n numere întregi, fie $S(\sigma)$ mulțimea tuturor sumelor distincte de forma $\sum_{i=k}^{\ell} \sigma(i)$, unde $1 \leq k \leq \ell \leq n$.

a) Găsiți o permutare σ a primelor n numere întregi astfel încât

$$|S(\sigma)| \geq \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{4} \right\rfloor.$$

b) Arătați că $|S(\sigma)| > \frac{n\sqrt{n}}{4\sqrt{2}}$ pentru orice permutare σ a primelor n numere întregi.

<https://examenemate.wordpress.com>

Al cincilea test de selecție pentru seniori

1. Fie ABC un triunghi. Fie P_1 și P_2 puncte pe latura AB astfel încât $P_2 \in [BP_1]$ și $AP_1 = BP_2$; analog, fie Q_1 și Q_2 pe latura BC astfel încât $Q_2 \in [BQ_1]$ și $BQ_1 = CQ_2$. Segmentele P_1Q_2 și P_2Q_1 se intersectează în punctul R , iar cercurile circumscrise triunghiurilor P_1P_2R și Q_1Q_2R se intersectează a doua oară în punctul S situat în interiorul triunghiului P_1Q_1R . Fie M mijlocul laturii AC .

Demonstrați că $\angle P_1RS \equiv \angle Q_1RM$.

2. Fie $n > 1$ un număr întreg și p un divizor prim al lui n . O *confederație* este formată din p state care au fiecare în parte n aeroporturi. Există p companii de aviație care operează zboruri între state doar dacă oricare două aeroporturi din state diferite sunt conectate printr-un zbor direct operat de către una dintre aceste companii.

Determinați numărul întreg maxim care satisface următoarea condiție: În fiecare dintre aceste confederații este posibil să alegem una dintre cele p companii aeriene și N din cele np aeroporturi astfel încât să putem să călătorim (nu neapărat direct) din oricare aeroport din cele N alese către oricare astfel de aeroport printr-un zbor operat de către compania aeriană aleasă.

3. Fie șirul de numere întregi definit prin $a_0 = 1$ și $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a_k$, $(\forall) n \geq 1$. Fie m un număr întreg pozitiv, p un număr prim și fie q și r două numere întregi nenegative.

Arătați că diferența $a_{p^m q+r} - a_{p^{m-1} q+r}$ este divizibilă prin p^m .