

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Timișoara, 20 aprilie 2017

CLASA a 12-a

Problema 1. Fie $f: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ o funcție continuă. Arătați că:

(a) Există un număr natural n_0 , astfel încât oricare ar fi numărul natural $n > n_0$, există un unic număr real $x_n > 0$ pentru care

$$n \int_0^{x_n} f(t) dt = 1;$$

(b) Șirul $(nx_n)_{n > n_0}$ este convergent și determinați limita sa.

Problema 2. Fie n un număr natural nenul, fie $a_1 < \dots < a_n$ numere reale și fie $b_1, \dots, b_n$ numere reale arbitrare. Arătați că:

(a) Dacă toate numerele b_i sunt strict pozitive, atunci există un polinom f cu coeficienți reali, care nu are nicio rădăcină reală, astfel încât $f(a_i) = b_i$, $i = 1, \dots, n$;

(b) Există un polinom f de grad cel puțin 1, care are toate rădăcinile reale, astfel încât $f(a_i) = b_i$, $i = 1, \dots, n$.

Problema 3. Fie G un grup finit care are următoarea proprietate: pentru orice automorfism f al lui G , există un număr natural m , astfel încât $f(x) = x^m$, oricare ar fi $x \in G$. Arătați că G este comutativ.

Problema 4. (a) Dați un exemplu de funcție continuă $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt = 1,$$

dar $f(x)/x$ nu are limită când $x \rightarrow \infty$.

(b) Fie $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție crescătoare, astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt = 1.$$

Arătați că $f(x)/x$ are limită când $x \rightarrow \infty$ și determinați valoarea acesteia.