

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Timișoara, 20 aprilie 2017

CLASA a 11-a

Problema 1. Spunem că o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea (P) dacă oricare ar fi un șir de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea că șirul $(f(x_n))_{n \geq 1}$ este convergent, rezultă că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent. Demonstrați că o funcție surjectivă cu proprietatea (P) este continuă.

Problema 2. Fie $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice simetrice. Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $\det(A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_k^2) = 0$;

2) pentru orice matrice $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ are loc relația

$$\det(A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_k B_k) = 0.$$

(O matrice X este simetrică dacă ea coincide cu transpusa sa X^t).

Problema 3. Fie $n \geq 2$ întreg și $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Dacă $(AB)^3 = O_n$, rezultă oare că $(BA)^3 = O_n$? Justificați răspunsul.

Problema 4. Fie $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ o funcție derivabilă cu f' continuă și strict pozitivă. Demonstrați că există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(f(b)) - f(f(a)) = (f'(c))^2(b - a).$$