



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Brașov, 11 aprilie 2023

CLASA a VII-a – subiecte

Problema 1. Pentru n număr natură definim

$$a_n = \{\sqrt{n}\} - \{\sqrt{n+1}\} + \{\sqrt{n+2}\} - \{\sqrt{n+3}\}.$$

Problema 2. În paralelogramul $ABCD$ punctul O este intersecția diagonalelor sale, iar M este mijlocul laturii AB . Fie P un punct al segmentului OC și Q intersecția dreptelor MP și BC . Paralela prin O la MP intersectează dreapta CD în punctul N . Arătați că punctele A , N și Q sunt coliniare dacă și numai dacă P este mijlocul segmentului OC .

Problema 3. Se consideră un triunghi ABC care are $\angle BAC = 90^\circ$ și $\angle ABC = 60^\circ$. Luăm punctele D și E pe laturile AC , respectiv AB , astfel încât $CD = 2 \cdot DA$ și DE este bisectoarea unghiului $\angle ADB$. Notăm cu M intersecția dreptelor CE și BD , iar cu P intersecția dreptelor DE și AM . Arătați că:

- a) dreptele AM și BD sunt perpendiculare;
- b) $3 \cdot PB = 2 \cdot CM$.

Problema 4. a) Arătați că există numerele iraționale a , b , c astfel încât numerele $a + b \cdot c$, $b + a \cdot c$ și $c + a \cdot b$ să fie raționale.

b) Arătați că, dacă a , b , c sunt numere reale astfel încât $a + b + c = 1$ și numerele $a + b \cdot c$, $b + a \cdot c$ și $c + a \cdot b$ sunt raționale și nenule, atunci numerele a , b , c sunt raționale.