

Problema 2 – ubuntzei

autor stud. Marius Stroe
Universitatea „Babeș Bolyai”, Facultatea de Informatică
Cluj-Napoca

Soluție 100 puncte

Fie $G = (V, E)$ graful neorientat ce modelează țara din enunțul problemei. Cerința constă în a găsi un drum de lungime minimă în graful G de la nodul de start la nodul destinație trecând cel puțin o dată prin cele K orașe date.

În acest sens, construim un nou graf $G' = (V', E')$, unde V' este o mulțime de perechi (u, s) , astfel încât u este un nod din V , iar s este o submulțime a celor K orașe. Perechea (u, s) semnifică că suntem în nodul u și am vizitat nodurile din mulțimea s .

Astfel, vom aplica algoritmul lui *Dijkstra* pe acest graf căutând drumul de lungime minimă de la nodul $(1, \{\})$ la nodul $(N, \{C_1, C_2, \dots, C_K\})$. În implementare, mulțimile se pot reține cu ajutorul biților și se pot manipula cu ajutorul măștilor pe biți.

Complexitate finală: $O(K * M \log_2(N) + 2^K K^2 \log_2(K))$.

Se observă că graful G' este aciclic. Astfel, o soluție alternativă folosește metoda *programării dinamice*, calculând $dp(i, s)$ ca fiind costul minim de a ajunge în orașul i și să fi trecut cel puțin o dată prin orașele din mulțimea s . Recurența este

$$dp(i, s) = \min \{ dp(j, s - \{i\}) + \text{dist}_G(i, j) : j \text{ în } s \text{ și } j \neq i \}$$

unde $\text{dist}_G(i, j)$ reprezintă distanța în graful G , graful inițial, de la nodul i la nodul j .

Soluție 70 de puncte

Această soluție se bazează pe ideea anterioară, doar că drumurile minime dintre oricare două noduri din cele K se calculează cu algoritmul lui *Floyd-Warshall* în complexitate $O(N^3)$. Iar drumul minim în graful G' se calculează cu oricare din variantele prezentate la soluția anterioară, inclusiv *algoritmul lui Bellman Ford* cu coadă.

Soluție 50 puncte

Vom precalcula cu algoritmul lui *Floyd-Warshall* distanțele dintre oricare două noduri din graful G . Fie d matricea distanțelor obținută la terminarea algoritmului.

Ulterior, enumerăm toate permutările P ale celor K noduri, calculăm pentru fiecare distanța $d(1, P_1) + d(P_1, P_2) + \dots + d(P_{K-1}, P_K) + d(P_K, N)$ și alegem cea mai mică valoare, ce va fi răspunsul.

Complexitate finală: $O(N^3 + K!)$.

Soluție 20 de puncte

Se va calcula lungimea drumului minim de la nodul 1 la nodul N , utilizând orice algoritm de drum minim cunoscut.