

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 16 martie 2019
Clasa a IX-a

Subiecte

Problema 1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și numerele strict pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$, respectiv $b_1, b_2, \dots, b_n$ astfel încât $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = S$.

- a) Demonstrați că $\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{a_k + b_k} \geq \frac{S}{2}$.
b) Demonstrați că $\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{a_k + b_k} = \sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{a_k + b_k}$.

Problema 2. Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC . În planul triunghiului ABC considerăm un punct X astfel încât triunghiul XAH este dreptunghic isoscel cu ipotenuza AH , iar B și X sunt de o parte și de alta a dreptei AH . Demonstrați că $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XH} = \overrightarrow{XB}$ dacă și numai dacă $\angle BAC = 45^\circ$.

Problema 3. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un șir de numere reale cu proprietatea

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = na_{n+1},$$

pentru orice $n \geq 1$.

- a) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică.
b) Dacă $[a_1] + [a_2] + \dots + [a_n] = [a_1 + a_2 + \dots + a_n]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, demonstrați că toți termenii șirului sunt numere întregi. (cu $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x)

Problema 4. Determinați toate numerele naturale nenule p pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $p^n + 3^n$ să dividă numărul $p^{n+1} + 3^{n+1}$.