

Problema - charlie

Autor: prof. Eugen Nodea,
Colegiul Național „Tudor Vladimirescu”, Târgu Jiu

Punctul a) 25 puncte

- printr-o parcurgere liniară a șirului se determină lungimea maximă a unei secvențe alternante de litere

Punctul b) 75 puncte

Este o problema de Greedy + stiva (**st**)

Rezolvarea se bazează pe afirmația că ordinea în care se efectuează operațiile de eliminare a literelor nu influențează rezultatul final (vezi demonstrația).

Fie șirul de litere $s = (s[i])_{i=0,1,\dots,n-1}$, unde $n = \text{strlen}(s)$

```
push(st, s[0])
push(st, s[1])
pentru i = 2, n-1 execută
|   cat timp (s[i] > st[vf] && st[vf] < st[vf-1]) execută
|   |   pop(st)      // eliminam din stiva st[vf]
|   |   ■
|   push(st, s[i])
|   ■
```

Complexitatea : $O(n)$

charlie – Rezolvare teoretică (prof. Stelian Ciurea)

Rezolvarea problemei se bazează pe afirmația că ordinea în care se efectuează operațiile de eliminare a unui *minim local* nu influențează rezultatul final. Aceasta deoarece în momentul în care un element a_i care este minim local urmează să fie eliminat, vecinii lui din pozițiile a_{i-1} și a_{i+1} sunt unic determinați, indiferent ce transformări ale șirului au avut loc mai înainte.

Dar înainte de a demonstra această afirmație, este bine să observăm următoarele:

- 1) dacă în șir există paliere de două sau mai multe elemente (unde palier = subșir de elemente egale aflate în poziții consecutive), elementele acestor paliere nu vor putea fi eliminate. Justificare afirmației este imediată: fie $a_i = a_{i+1}$; niciunul dintre aceste elemente nu vor putea deveni la un moment dat minim local. Să presupunem prin reducere la absurd că a_i ar putea deveni minim local. Aceasta presupune că la un moment anterior a_{i+1} a fost eliminat și în locul lui a venit un element mai mare. Ceea ce este fals deoarece a_{i+1} nu putea fi eliminat atâta timp cât în poziția din stânga lui se află a_i ! Raționamentul este similar pentru a_{i-1} .
- 2) dacă avem două elemente oarecare a_i și a_j și $i < j$ (adică a_i se află în stânga lui a_j) și prin aplicarea unui număr oarecare de eliminări de minime locale din șir, a_i și a_j au rămas în șir, atunci în continuare $i < j$ (adică a_i se va afla tot în stânga lui a_j) chiar dacă numărul de elemente dintre pozițiile i și j s-a micșorat, eventual s-a redus la 0. Această afirmație este evidentă prin modul în care se efectuează operația de eliminare: la efectuarea unei eliminări, un element nu poate avansa spre stânga mai mult de o poziție. Pentru ca a_j să treacă înaintea lui a_i , ar fi necesar ca la o singură eliminare a_j să avanseze cu două poziții mai mult decât a_i ceea ce este imposibil.

Atenție! Repetăm că această afirmație se referă la situația în care a_i și a_j au rămas în șir!

Să trecem acum la justificarea afirmației de la începutul demonstrației și anume că în momentul în care un element a_i care este minim local și urmează să fie eliminat, vecinii lui din pozițiile a_{i-1} și a_{i+1} sunt unic determinați, indiferent ce transformări ale șirului au avut loc mai înainte. Evident, toată discuția are rost

dacă a_i va putea fi eliminat. Dacă unul dintre vecinii lui este egal cu el, conform afirmației 1, a_i nu va putea fi eliminat și deci analiza nu mai are rost!

Se disting următoarele situații:

- a_i este minim local, atunci nici a_{i-1} și nici a_{i+1} nu vor putea fi eliminate înaintea lui a_i deoarece atâta timp cât în șir există a_i , niciunul dintre cele două nu poate fi minim local!

- a_i nu este minim local; atunci cel puțin unul dintre vecinii lui este strict mai mic decât el. Să presupunem că elementul aflat în dreapta lui a_i este mai mic decât a_i : $a_i > a_{i+1}$. Atunci pentru ca a_i să poată fi eliminat este obligatoriu ca în pozițiile $i+2, i+3, \dots, L$ (L fiind ultima poziție din șir) să existe cel puțin un element strict mai mare decât a_i . Dacă toate elementele din dreapta lui a_i ar fi mai mici sau egale cu a_i , este evident că el nu va putea deveni minim local!

Să presupunem că sunt mai multe elemente mai mari decât a_i . Fie acestea în pozițiile $p_1, p_2, \dots, p_k$, cu $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Deci elementul din p_1 este cel mai din stânga dintre acestea și deci între pozițiile $i+1$ și p_1-1 nu există niciun element mai mare decât a_i . În aceste condiții, prin aplicarea eliminărilor de minime locale, singurul element mai mare decât a_i care poate să apară în poziția $i+1$ este cel aflat inițial în p_1 (adică primul element mai mare decât a_i aflat în dreapta lui a_i).

Să presupunem prin reducere la absurd că ar putea să apară un element mai mare decât a_i aflat inițial într-o poziție din dreapta lui p_1 . Conform afirmației 2, aceasta nu poate să se întâmple dacă elementul din p_1 a rămas în șir. Deci singura posibilitate ar fi ca elementul din p_1 să fie eliminat. Dar aceasta presupune că el devine minim local la un moment dat (în condițiile în care ai este încă în șir!), ceea ce este imposibil deoarece conform ipotezei făcute, între pozițiile $i+1$ și p_1-1 nu există niciun element mai mare decât a_i , iar $a_i < a_{p_1}$!

Cazul $a_i > a_{i-1}$ se tratează similar. Cu aceasta considerăm afirmația demonstrată.

Din această demonstrație rezultă că dacă un element oarecare a_i va fi eliminat și inițial el nu este minim local, atunci în momentul în care devine minim local el va fi încadrat de cele mai apropiate elemente strict mai mari decât el aflate în stânga și respectiv în dreapta lui.

În concluzie, rezultatul aplicării eliminărilor din șir este unic indiferent de ordinea în care acestea se efectuează, deci orice program care efectuează corect toate eliminările posibile va conduce la rezultatul corect.

Singura problemă este complexitatea algoritmului.