

Olimpiada Națională de Matematică
Primul baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori,
Satu Mare, 6 aprilie 2018

Problema 1. Arătați că ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 1$ nu are soluții în mulțimea numerelor raționale.

* * *

Soluție:

Ecuația se poate scrie echivalent sub forma $(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 + (2z - 1)^2 = 7$ **1p**
 Dacă această ecuație ar avea o soluție rațională (x, y, z) , notând $2x - 1 = \frac{a_1}{b_1}$, $2y - 1 = \frac{a_2}{b_2}$, $2z - 1 = \frac{a_3}{b_3}$ am obține că numerele întregi $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ satisfac egalitatea $(a_1 b_2 b_3)^2 + (b_1 a_2 b_3)^2 + (b_1 b_2 a_3)^2 = 7(b_1 b_2 b_3)^2$ **2p**
 Acest fapt ar implica existența a patru numere întregi a, b, c, d astfel ca $a^2 + b^2 + c^2 = 7d^2$.
 Dacă c.m.m.d.c. $(a, b, c, d) = k$, împărțind cu k^2 am găsi o soluție $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ a ecuației $a^2 + b^2 + c^2 = 7d^2$ cu c.m.m.d.c. $(a, b, c, d) = 1$. Atunci a, b, c, d nu pot fi toate pare.
 Deoarece un pătrat perfect dă unul din resturile 0, 1 sau 4 la împărțirea cu 8, membrul stâng dă unul din resturile 1, 2, 3, 5 sau 6 la împărțirea cu 8, în vreme ce $7d^2$ dă rest 0, 4 sau 7. Prin urmare egalitatea nu poate avea loc. **4p**

Problema 2. Fie numerele reale pozitive a, b, c astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Arătați că

$$\frac{1}{a} + \frac{3}{b} + \frac{5}{c} \geq 4a^2 + 3b^2 + 2c^2.$$

Când are loc egalitatea?

Marius Stănean, Zalău

Soluția 1:

Inegalitatea se poate scrie astfel $\frac{1}{a} + \frac{3}{b} + \frac{5}{c} + b^2 + 2c^2 \geq 4(a^2 + b^2 + c^2)$ **2p**
 Aplică inegalitatea mediilor (pe bucăți sau pentru 12 numere) **4p**
 Egalitatea are loc atunci când $a = b = c = 1$ **1p**

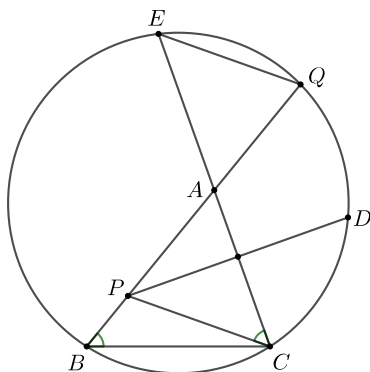
Soluția 2:

Avem $x^3 - 3x + 2 \geq 0$, $\forall x \geq 0$. Deducem că $\frac{1}{x} \geq \frac{3}{2} - \frac{x^2}{2}$ **3p**
 Scriind această inegalitate pentru a, b, c și înmulțind cu 1, 3, respectiv 5, obținem prin adunare $\frac{1}{a} + \frac{3}{b} + \frac{5}{c} \geq \frac{27}{2} - \frac{a^2 + 3b^2 + 5c^2}{2}$. Folosind că $27 = 9(a^2 + b^2 + c^2)$ se obține concluzia. **3p**
 Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$ **1p**

Problema 3. Fie ABC un triunghi oarecare astfel încât $AB > AC$. Punctul $P \in (AB)$ are proprietatea că $\angle ACP \equiv \angle ABC$. Fie D simetricul lui P față de AC și E punctul în care cercul circumscris triunghiului BCD taie a doua oară dreapta AC . Demonstrați că $AE = AC$.

Vlad Robu, Baia Mare

Soluție: Fie Q punctul în care cercul circumscris triunghiului BCD intersectează a doua oară dreapta AB . Atunci $\angle QEA \equiv \angle QBC \equiv \angle ECP$, deci $EQ \parallel PC$ **2p**
În plus, $\angle ECP \equiv \angle ECD$ implică $QD \parallel EC$, deci $EQ = CD = CP$ **4p**
Deducem că $EQCP$ este paralelogram, de unde concluzia. **1p**



Problema 4. Care este numărul maxim de ture ce se pot plasa pe o tablă de șah astfel încât orice tură să atace exact două alte ture?

Alexandru Mihalcu, Oxford

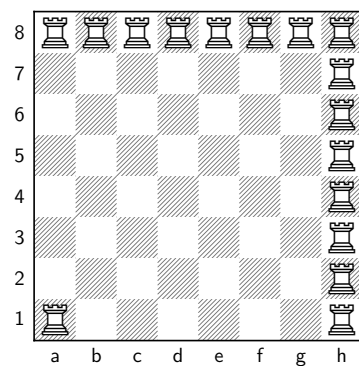
Soluție:

Spunem că turele de pe tablă sunt de două feluri:

de tipul $T1$ dacă sunt atacate din direcții perpendiculare, respectiv de tipul $T2$ dacă sunt atacate din aceeași direcție, dar sens contrar.

Presupunem că putem plasa maxim x ture, m de tipul $T1$ și n de tipul $T2$. Observăm că orice tură de tipul $T1$ determină 2 linii de pe care este atacată (din cele 16 ale tablei: 8 orizontale și 8 verticale), iar exact o altă tură de tipul $T1$ se află pe oricare dintre aceste două linii. Pentru turele de tipul $T2$, putem observa că ele nu pot fi atacate din altă direcție în afara celei din care sunt atacate deja, deci pentru fiecare din cele m ture, există m linii care nu mai pot fi ocupate de alte ture. În total am putea avea $\frac{2n}{2} + m = n + m$ linii. Deci $16 \geq m + n = x$ **5p**

Problema se termină când găsim un exemplu cu 16 ture: **2p**



Olimpiada Națională de Matematică
Primul baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori,
București, 13 aprilie 2018

Problema 1. Determinați numerele naturale $n \geq 3$ cu proprietatea că, pentru orice $m \in \mathbb{N}$ există numerele întregi $a_1, a_2, \dots, a_n$ astfel încât $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ și $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = -m$.

Soluție:

Orice $n \geq 5$ are proprietatea cerută: putem alege $a_1 = 1 - m$, $a_2 = a_3 = \dots = a_{n-3} = 0$, $a_{n-2} = -1$, $a_{n-1} = m$, $a_n = 0$.

Numerele $n = 3$ și $n = 4$ nu au proprietatea cerută.

Pentru $n = 3$, $-2m = 2a_1a_2 + 2a_2a_3 + 2a_3a_1 = (a_1 + a_2 + a_3)^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$ revine la $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 2m$, relație care nu are loc de exemplu pentru $m = 14$. Într-adevăr, 28 nu se poate scrie ca sumă de trei pătrate perfecte.

Pentru $n = 4$, $-m = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1 = (a_1 + a_3)(a_2 + a_4) = -(a_1 + a_3)^2$ poate avea loc numai pentru m pătrat perfect, deci nu pentru orice m natural.

Remarcă: Teorema celor trei pătrate a lui Legendre spune că un număr natural se scrie ca sumă de trei pătrate perfecte dacă și numai dacă nu este de forma $4^a(8b + 7)$ cu $a, b \in \mathbb{N}$. Această teoremă explică alegerea lui $2m = 28$ în soluția de mai sus.

Problema 2. Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 12(x + y + z) = 108$. Aflați maximul expresiei x^3y^2z .

Soluție:

Intuind că maximul se atinge pentru $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$, înmulțim egalitatea din enunț cu 6 și aplicăm inegalitatea (ponderată a) mediilor:

$6 \cdot 108 = 4x^2 + 4x^2 + 4x^2 + 9y^2 + 9y^2 + 36z^2 + 12x + 12x + 12x + 12x + 12x + 12x + 18y + 18y + 18y + 18y + 36z + 36z \geq 18 \sqrt[18]{2^{28} \cdot 3^{24} \cdot x^{12} \cdot y^8 \cdot z^4}$, de unde rezultă imediat că maximul cerut este 108 și se atinge atunci când toate aceste numere sunt egale, adică pentru $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$.

Problema 3. Triunghiul ABC are proprietatea că există un unic punct $X \in [BC]$ astfel încât $AX^2 = BX \cdot CX$. Demonstrați că $AB + AC = BC\sqrt{2}$.

Soluție:

Fie T simetricul lui A față de X . Din reciproca teoremei puterii punctului, $ABTC$ este inscripabil. Dacă paralela prin T intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în U , iar $AU \cap BC = \{Y\}$, atunci $Y \in [BC]$ și $BY \cdot CY = AY \cdot UY = AY^2$, deci pentru ca punctul X să fie unic este necesar ca $T = U$, adică T să fie mijlocul arcului BC , adică X

să fie piciorul bisectoarei.

De aici se poate finaliza în mai multe moduri, de exemplu cu formula pentru lungimea bisectoarei.

O finalizare simplă e și cu relația lui Stewart:

Notând $AX = \ell$, $BX = x$, $CX = y$, avem $b^2x + c^2y = \ell^2a + axy$. Se știe că $x = \frac{ac}{b+c}$, $y = \frac{ab}{b+c}$. Atunci $\ell^2 = xy \Leftrightarrow b^2x + c^2y = 2axy \Leftrightarrow (b+c)^2 = 2a^2 \Leftrightarrow b+c = a\sqrt{2}$.

Comentariu: Scriind relația lui Stewart și înlocuind $AX^2 = BX \cdot CX$ și $CX = a - BX$, se ajunge la următoarea ecuație în necunoscuta $x = BX$: $f(x) := 2ax^2 - (c^2 + 2a^2 - b^2)x + c^2a = 0$. Cum $f(0) \cdot f(a) > 0$, această ecuație are o unică soluție în $[0, a]$ dacă și numai dacă $\Delta = 0$ (se verifică că acea soluție este într-adevăr în $[0, a]$ dacă $\Delta = 0$). Ori $\Delta = (a\sqrt{2} + b + c)(a\sqrt{2} + b - c)(a\sqrt{2} - b + c)(a\sqrt{2} - b - c)$. Singurul factor care se poate anula este $a\sqrt{2} - b - c$.

Problema 4. Pentru $n \geq 2$ considerăm n cutii ordonate de la stînga la dreapta, în care punem câte o bilă ce poate avea una dintre culorile roșu, albastru sau alb, astfel ca să fie îndeplinită condiția:

Oricare dintre cutii este vecină cu cel puțin una cu bila de aceeași culoare.

Notăm cu I_n numărul de astfel de configurații.

a) Determinați I_{11} justificând răspunsul.

b) Determinați cu demonstrație formula generală pentru I_n .

Soluție:

Fie a_n numărul de configurații care încep cu o culoare fixată, să zicem roșu. E clar că $I_n = 3a_n$

Evident $a_2 = 1, a_3 = 1$. Fie acum $n \geq 4$. Avem bila roșie în prima cutie și definim k = cea mai mare secvență de bile roșii începând cu prima poziție.

Distingem cazurile:

- $k = 2$; Pe poziția a doua e o bilă roșie și pe a treia alb sau albastru, deci două variante. Aceste configurații vor da $2a_{n-2}$.

- $k \geq 3$: Eliminăm prima bilă și ajungem la situația a_{n-1} . Cum cele două tipuri de configurații sunt diferite și le cuprind pe toate avem $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Prin inducție găsim formula $a_n = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3}$ deci $I_n = 2^{n-1} + (-1)^n$.

Pentru $n = 11$ deducem $a_{11} = 1023$.

Al doilea test de selecție pentru OBMJ
București, 25 aprilie 2018

Problema 1. Determinați toate triplete (a, b, c) de numere reale pentru care au loc simultan relațiile:

$$\begin{aligned}a(b^2 + c) &= c(c + ab), \\ b(c^2 + a) &= a(a + bc), \\ c(a^2 + b) &= b(b + ca).\end{aligned}$$

Olimpiadă Cehia și Slovacia

Soluție: Fie (a, b, c) o soluție a sistemului. Dacă unul dintre numerele a, b, c este egal cu 0, de exemplu dacă $c = 0$, atunci din $c(a^2 + b) = a(b + ca)$ rezultă $a = 0$, apoi, similar, că $b = 0$. Așadar, dacă $abc = 0$, atunci $a = b = c = 0$. Căutăm în continuare soluții cu $abc \neq 0$. Relațiile din enunț se pot rescrie echivalent

$$\begin{aligned}ab(b - c) &= c(c - a) \\ bc(c - a) &= a(a - b) \\ ca(a - b) &= b(b - c).\end{aligned}$$

Astfel, $a^2b^2c^2(a - b)(b - c)(c - a) = abc(a - b)(b - c)(c - a)$.

Cazul 1: Printre numerele a, b, c există (cel puțin) două egale; fie acestea a și b . Avem

$$a^2c + bc = b^2 + abc \Leftrightarrow bc = b^2 \Leftrightarrow c = b,$$

deci în acest caz rezultă $a = b = c$. Reciproc, orice triplet cu componentele egale satisface relațiile date.

Cazul 2: Dacă $a \neq b \neq c \neq a$, atunci $abc = 1$. Rezultă că $ab(b - c) = c(c - a) \Leftrightarrow (b - c) = c^2(c - a)$ și încă două relații similare. Rezultă că

$$a^3 + b^3 + c^3 = ac^2 + ba^2 + cb^2.$$

Dacă $a, b, c > 0$, atunci din inegalitatea mediilor avem $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3ba^2$ (cu egalitate dacă $a = b$) care, adunată cu analogele, conduce la $a^3 + b^3 + c^3 \geq ac^2 + ba^2 + cb^2$. Avem așadar egalitate în inegalitatea precedentă, deci $a = b = c$.

Dacă una din variabile este pozitivă, iar celelalte două negative, de exemplu $a > 0$, $b, c < 0$, atunci

$$b(c^2 + a) = a(a + bc) = a^2 + 1 > 0 \Rightarrow a < 0,$$

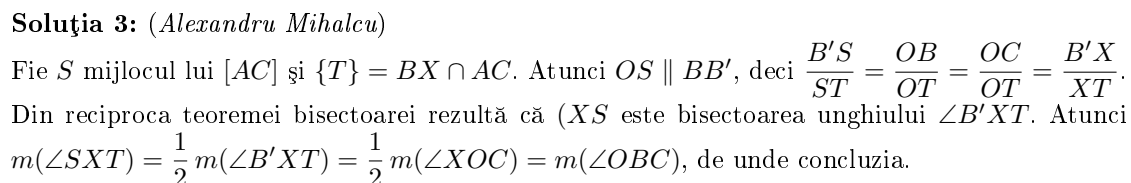
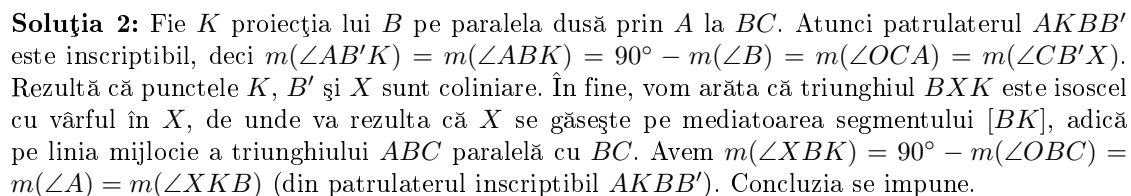
contradicție.

În concluzie, singurele soluții sunt $(a, b, c) = (x, x, x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic în care $AB < BC$, O centrul cercului său circumscris și B' piciorul înălțimii din B . Paralela prin B' la CO intersectează dreapta BO în punctul X . Arătați că X și mijloacele segmentelor $[AB]$ și $[AC]$ sunt coliniare.

Caucasus Mathematical Olympiad

Soluția 1: Fie M mijlocul laturii $[AB]$. Atunci $m(\angle OBC) = m(\angle OCB) = 90^\circ - m(\angle A)$ și $MX \parallel BC$ revine la $m(\angle MXB) = 90^\circ - m(\angle A)$. Dar $m(\angle B'XB) = m(\angle XOC) = 2m(\angle OBC) = 180^\circ - 2m(\angle A)$. În triunghiul ABB' avem $MA = MB = MB'$ și $m(\angle BMB') = m(\angle MAB') + m(\angle MB'A) = 2m(\angle A)$. Rezultă că patrulaterul $MBXB'$ este inscriptibil, deci $m(\angle MXB) = m(\angle MB'B) = m(\angle ABB') = m(\angle OBC)$, de unde concluzia.


$$A + A = \{a + b \mid a, b \in A\}, \quad A \cdot A = \{a \cdot b \mid a, b \in A\}.$$

- i) $A + A \neq A \cdot A$;
- ii) $(A + A) \cap \mathbb{N} = (A \cdot A) \cap \mathbb{N}$.

2

Soluție:

i) Fie $a = 1 + \frac{1}{1} = 2 \in A$, $b = 2 + \frac{1}{2} \in A$. Avem

$$a + b = 2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \in A + A$$

Arătăm că $\frac{9}{2} \notin A \cdot A$. Presupunem prin absurd că

$$\frac{9}{2} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \left(\frac{z}{t} + \frac{t}{z}\right) = \frac{(x^2 + y^2)(z^2 + t^2)}{xyzt}$$

cu $(x, y) = (z, t) = 1$, $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Rezultă $3 \mid x^2 + y^2$ sau $3 \mid z^2 + t^2 \Rightarrow 3 \mid x$ sau $3 \mid y$ sau $3 \mid z$ și $3 \mid t$

$\Rightarrow (x, y) \neq 1$ sau $(z, t) \neq 1$ contradicție

ii) Arătăm că $A \cdot A \subset A + A$.

$$\left(q_1 + \frac{1}{q_1}\right) \left(q_1 + \frac{1}{q_2}\right) = \left(q_1 q_2 + \frac{1}{q_1 q_2}\right) + \left(\frac{q_1}{q_2} + \frac{q_2}{q_1}\right) \in A + A,$$

deci

$$(A \cdot A) \cap \mathbb{N} \subset (A + A) \cap \mathbb{N}.$$

Incluziunea inversă:

$$(A + A) \cap \mathbb{N} \subset (A \cdot A) \cap \mathbb{N}.$$

Fie

$$n = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{z}{t} + \frac{t}{z}\right) = \frac{(x^2 + y^2)zt + (z^2 + t^2)xy}{xyzt} \in \mathbb{N}$$

cu $x, y, z, t \in \mathbb{N}$, $(x, y) = (z, t) = 1$. Avem:

$$(x^2 + y^2, xy) = 1 \text{ și } (z^2 + t^2, zt) = 1,$$

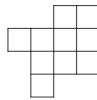
deci rezultă

$$xy \mid zt \text{ și } zt \mid zy \Rightarrow xy = zt.$$

Luăm $q_1 = \frac{z}{y}$, $q_2 = \frac{x}{z}$ și avem:

$$\begin{aligned} \left(q_1 + \frac{1}{q_1}\right) \left(q_2 + \frac{1}{q_2}\right) &= \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z^2}{xy} + \frac{xy}{z^2} \\ &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z^2}{zt} + \frac{zt}{z^2} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{z}{t} + \frac{t}{z}\right) = n \in A + A. \end{aligned}$$

Problema 4. Fie o tablă 2018×2018 . Numim dală LC o dală formată din 9 pătrățele unitate congruentă cu cea din figura de mai jos

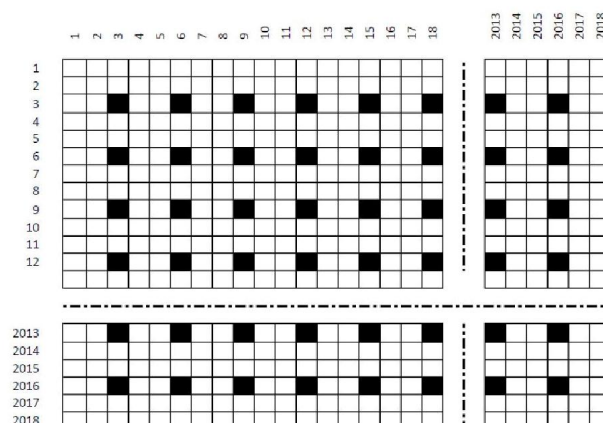


Care este numărul maxim de dale LC ce pot fi așezate fără suprapuneri pe tablă? (Fiecare din cele 9 pătrățele unitate ale dalei trebuie să se suprapună peste una din pătrățelele unitate ale tablei; o dală poate fi rotită, simetrizată, etc.)

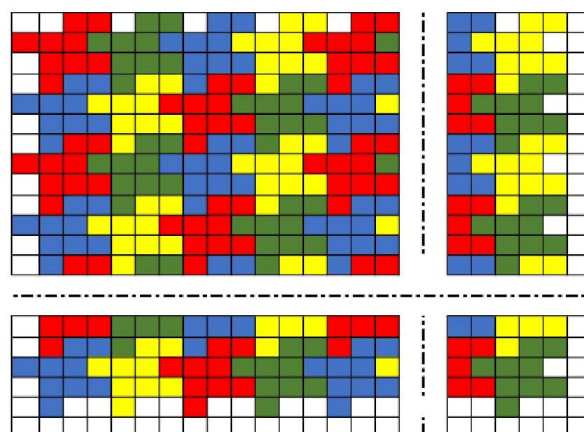
Alexandru Girban

Soluție:

Numerotăm liniile și coloanele de la 1 la 2018. Colorăm cu negru pătrățelele unitate care au ambele coordonate divizibile cu 3.



Sunt 672^2 pătrățele negre. Observăm că fiecare dală LC acoperă exact un pătrățel negru, deci putem plasa pe tablă cel mult 672^2 dale. Pe de altă parte, exemplul de mai jos indică un mod de a așeza pe tablă 672^2 dale. Așadar maximul căutat este 672^2 .



Al treilea test de selecție pentru OBMJ
București, 26 aprilie 2018

Problema 1. Determinați numerele prime p pentru care numărul $a = 7^p - p - 16$ este pătrat perfect.

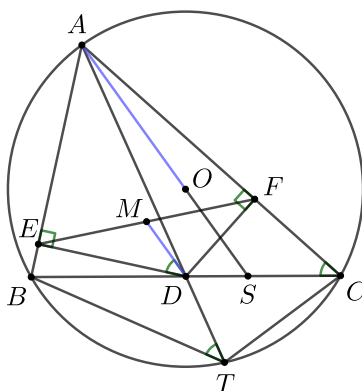
Lucian Petrescu

Soluție: $p = 2$ nu verifică. $p = 3$ este soluție: $a = 7^3 - 3 - 16 = 324 = 18^2$. Arătăm că nu avem alte soluții. Fie $p \geq 5$ un număr prim. Dacă $p \equiv 1 \pmod{4}$, atunci $a \equiv 2 \pmod{4}$, deci a nu este pătrat perfect. Se constată ușor că $p = 7$ nu este soluție (calculând a , ultimele două cifre ale lui a sau observând că $a \equiv 5 \pmod{7}$). Dacă $p > 7$ este un număr prim de forma $4k + 3$, atunci din mica teoremă a lui Fermat rezultă că $7^p \equiv 7 \pmod{p}$, deci $a \equiv -9 \pmod{p}$, adică $p \mid a + 9$. Dacă a ar fi pătrat perfect, atunci p divide $a + 9 = b^2 + 3^2$ implică p divide b și p divide 3, ceea ce nu se poate. Prin urmare, singura soluție a problemei este $p = 3$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic în care $AB \neq AC$. Fie D mijlocul laturii $[BC]$, iar E și F proiecțiile lui D pe laturile AB , respectiv AC . Dacă M este mijlocul segmentului $[EF]$, iar O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , demonstrați că dreptele DM și AO sunt paralele.

Soluție:

Fie $\{S\} = AO \cap BC$ și T punctul în care dreapta AD intersectează pentru a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC . Patrulaterul $ABTC$ și $AEDF$ sunt inscriptibile, deci $\angle TBD \equiv \angle TAC \equiv \angle DEF$ și $\angle TCD \equiv \angle TAB \equiv \angle DFE$. Rezultă că triunghiurile DEF și TBC sunt asemenea. Atunci $\frac{TB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{BC/2}{EF/2} = \frac{BD}{EM}$. Rezultă atunci că și triunghiurile TBD și DEM sunt asemenea, deci $\angle EDM \equiv \angle BTD \equiv \angle ACB$, deci $m(\angle BDM) = m(\angle BDE) + m(\angle EDM) = 90^\circ - m(\angle ABC) + m(\angle ACB)$. Deoarece $m(\angle OAC) = 90^\circ - m(\angle ABC)$, rezultă că $m(\angle ASB) = m(\angle SAC) + m(\angle ACB) = 90^\circ - m(\angle ABC) + m(\angle ACB) = m(\angle MDB)$, de unde rezultă că AS este paralelă cu MD .



Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Paralela prin A la BD intersectează paralela prin B la AC în punctul E . Cercul circumscris triunghiului ABE intersectează a doua oară dreptele EC și ED în punctele F , respectiv G . Arătați că dreptele AB , CD și FG sunt paralele sau concurente.

Severius Moldoveanu

Olimpiadă Estonia

Afirmația este așadar demonstrată.

Reciproc, să presupunem că suma maselor este pară. Așezăm greutatea de masă m_n într-unul din talerile balanței. Modulul diferenței dintre masele greutăților așezate în cele două talere este $m_n \leq n$. În continuare așezăm succesiv greutățile de mase $m_{n-1}, m_{n-2}, \dots, m_1 = 1$ în talerul în

care suma este mai mică. (În caz că balanța este în echilibru, așezăm greutatea în oricare taler.) Astfel, după așezarea grutății m_k , diferența dintre totalurile maselor în cele două talere este cel mult k . La sfârșit, procedând astfel, facem ca după așezarea grutății de masă m_1 , diferența dintre talere să fie cel mult 1. Însă suma totală a maselor fiind pară, rezultă că diferența este 0, ceea ce ne propusesem.

Al patrulea test de selecție pentru OBMJ
București, 16 mai 2018

Problema 1. Demonstrați că un număr natural A este pătrat perfect dacă și numai dacă, pentru orice număr natural nenul n , cel puțin una din diferențele

$$(A+1)^2 - A, (A+2)^2 - A, (A+3)^2 - A, \dots, (A+n)^2 - A$$

este divizibilă cu n .

Olimpiadă Cehia și Slovacia

Soluție:

Dacă A este pătrat perfect, adică există $B \in \mathbb{N}$ astfel încât $A = B^2$, atunci $(A+k)^2 - A = (B^2+k)^2 - B^2 = (B^2+B+k)(B^2-B+k)$ pentru orice $k = \overline{1, n}$ și exact unul dintre numerele (consecutive) $B^2+B+1, B^2+B+2, \dots, B^2+B+n$ este divizibil cu n , de unde concluzia.

Reciproc, dacă A nu este pătrat perfect, atunci există un factor prim p care în descompunerea în factori primi a lui A apare la o putere impară. Fie p un asemenea număr prim și $j \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $p^{2j-1} \mid A$, dar $p^{2j} \nmid A$. Alegem $n = p^{2j} \in \mathbb{N}^*$ și arătăm că niciunul din numerele $(A+1)^2 - A, (A+2)^2 - A, (A+3)^2 - A, \dots, (A+n)^2 - A$ nu este divizibil cu n . Într-adevăr, dacă $n \mid (A+m)^2 - A$, cu $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, adică $p^{2j} \mid A^2 + 2Am + m^2 - A$, cum $p^{2j-1} \mid A$, rezultă $p^{2j-1} \mid m^2$, de unde $p^j \mid m$. Dar atunci $p^{2j} \mid (A+m)^2$ și $p^{2j} \mid (A+m)^2 - A$, deci $p^{2j} \mid A$, contradicție.

Problema 2. Dacă $a, b, c > 0$, arătați că

$$\frac{a}{\sqrt{(a+2b)^3}} + \frac{b}{\sqrt{(b+2c)^3}} + \frac{c}{\sqrt{(c+2a)^3}} \geq \frac{1}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Alexandru Mihalcu

Soluție:

Din inegalitatea lui Hölder avem: $\sum_{cycl} \frac{a}{\sqrt{(a+2b)^3}} \cdot \sum_{cycl} a\sqrt{a+2b} \cdot \sum_{cycl} a\sqrt{a+2b} \cdot$

$\sum_{cycl} a\sqrt{a+2b} \geq (a+b+c)^4$, iar din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz

rezultă

$$\left(\sum_{cycl} a\sqrt{a+2b} \right)^2 = \left(\sum_{cycl} \sqrt{a} \cdot \sqrt{a(a+2b)} \right)^2 \leq (a+b+c) \cdot \sum_{cycl} (a^2 + 2ab) = (a+b+c)^3, \text{ de unde concluzia.}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

În loc de inegalitatea lui Hölder se putea aplica de două ori inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz:

$$\sum_{cycl} \frac{a}{\sqrt{(a+2b)^3}} \cdot \sum_{cycl} a\sqrt{a+2b} \cdot \left(\sum_{cycl} a\sqrt{a+2b} \right)^2 \stackrel{CBS}{\geq} \left(\sum_{cycl} \frac{a}{\sqrt{a+2b}} \right)^2 \cdot \left(\sum_{cycl} a\sqrt{a+2b} \right)^2 \stackrel{CBS}{\geq} \left(\sum_{cycl} a \right)^4. \quad (1)$$

Pe de altă parte,

$$\left(\sum_{cycl} a\sqrt{a+2b} \right)^2 = \left(\sum_{cycl} \sqrt{a} \cdot \sqrt{a(a+2b)} \right)^2 \stackrel{CBS}{\leq} (a+b+c)(a(a+2b) + b(b+2c) + c(c+2a)) = (a+b+c)^3, \text{ deci } \left(\sum_{cycl} a\sqrt{a+2b} \right)^3 \leq \sqrt{(a+b+c)^9}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă imediat concluzia.

Egalitatea are loc dacă $a = b = c$.

Remarcă: Inegalitatea este o consecință directă a inegalității lui Jensen pentru funcția convexă $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, numerele $x_1 = a + 2b$, $x_2 = b + 2c$, $x_3 = c + 2a$ și ponderile $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$.

Problema 3. Alina și Bogdan joacă următorul joc. Ei au o grămadă formată din 330 de pietricele. Cei doi jucători mută alternativ. La o mutare se iau din grămadă 1, n sau m pietricele. Câștigă jocul cel care ia ultima pietricică. Înainte de a începe, Alina alege numărul n , ($1 < n < 10$), după care Bogdan alege numărul m , ($m \neq n$, $1 < m < 10$). Alina mută prima. Care din cei doi jucători are strategie de câștig? Dar dacă la început în grămadă sunt 2018 pietricele?

Olimpiadă Belarus, prelucrare

Soluție:

Bogdan are strategie câștigătoare. Iată o astfel de strategie (există și altele):

1. dacă Alina alege un număr n nedivizibil cu 3, atunci Bogdan alege $m = 2$ (sau un alt număr nedivizibil cu 3 dacă Alina a ales $n = 2$);
2. dacă Alina alege 3 sau 9, Bogdan alege 5;
3. dacă Alina alege 6, Bogdan alege 4.

1. În primul caz, Alina va lăsa în grămadă un număr de pietricele care nu este divizibil cu 3, Bogdan va lua 1 sau 2 pietricele pentru a lăsa mereu un număr de pietricele care este divizibil cu 3. Astfel, la final, el va fi cel care va ajunge să lase 0 pietricele.

2. Dacă Alina alege un număr impar, în particular 3 sau 9, Bogdan alege un număr m impar și ia de pe masă mereu o pietricică. Astfel, după mutările Alinei va rămâne un număr impar de pietricele, după mutările lui Bogdan, un număr par de pietricele. Așadar ultima mutare o va face Bogdan.

3. Dacă Alina alege 6, Bogdan alege 4 și va muta astfel: dacă Alina ia 1 sau 6 pietricele, Bogdan ia 4, iar dacă Alina ia 4, Bogdan ia una, astfel încât după mutările lui Bogdan numărul pietricelilor să fie mereu multiplu de 5. Cum inițial numărul pietricelilor este multiplu de 5, Alina va urma la mutare mereu când pe masă există $5k$ pietricele și ea nu va putea câștiga.

Dacă inițial pe masă sunt 2018 pietricele, Alina câștigă alegând $n = 2$.

- Dacă Bogdan alege $m \in \{4, 5, 7, 8\}$, Alina mută astfel încât să lase mereu un număr de pietricele divizibil cu 3 (inițial ia 2 pietricele).

- Dacă Bogdan alege $m = 3$, Alina mută astfel încât să lase mereu un număr de pietricele divizibil cu 4 (inițial ia 2 pietricele). (Apoi, dacă Bogdan ia 1, 2 sau 3 pietricele, Alina ia 3, 2, respectiv 1 pietricele, lăsând din nou un număr de pietricele divizibil cu 4.)

- Dacă Bogdan alege $m = 6$, Alina mută astfel încât să lase mereu un număr de pietricele care să dea unul din resturile 0 sau 3 la împărțirea cu 7 (inițial ia 2 pietricele). (Apoi, dacă Bogdan găsește pe masă $7k$ pietricele și ia 1, 2 sau 6 pietricele, atunci Alina ia 6, 2, respectiv 1 pietricele, iar dacă Bogdan găsește pe masă $7k + 3$ pietricele și ia 1, 2 sau 6 pietricele, Alina ia 2, 1, respectiv 1 pietricele.)

- Dacă Bogdan alege $m = 9$, Alina ia astfel încât să lase un număr de pietricele care dă unul din resturile 0, 3 sau 6 la împărțirea cu 10. Astel, prima ei mutare va fi să ia 2 pietricele. Dacă Bogdan urmează la mutare când pe masă sunt $10k$ pietricele, atunci: dacă Bogdan ia 1, 2 sau 9 pietricele, Alina ia 9, 2, respectiv 1 pietricele lăsând $10(k - 1)$ sau $10(k - 1) + 6$ pietricele. Dacă Bogdan urmează la mutare când pe masă sunt $10k + 3$ pietricele, atunci: dacă Bogdan ia 1, 2 sau 9 pietricele, Alina ia 2, 1, respectiv 1 pietricele lăsând $10k$ sau $10(k - 1) + 3$ pietricele. (Ultima situație este posibilă numai dacă $k \neq 0$.) Dacă Bogdan urmează la mutare când pe masă sunt $10k + 6$ pietricele, atunci: dacă Bogdan ia 1, 2 sau 9 pietricele, Alina ia 2, 1, respectiv 1 pietricele lăsând $10k + 3$ sau $10(k - 1) + 6$ pietricele. (Ultima situație este posibilă numai dacă $k \neq 0$.)

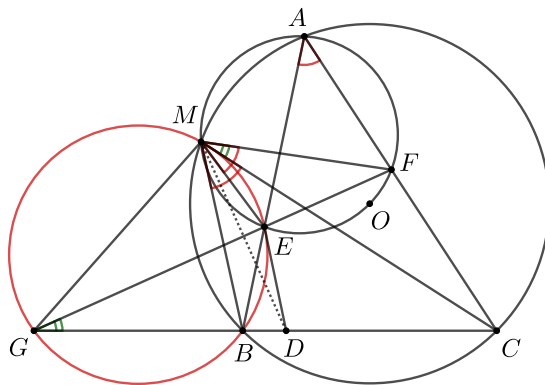
Așadar, oricum ar alege Bogdan valoarea lui m , alegând $n = 2$ și luând prima dată 2 pietricele din grămadă, Alina câștigă.

Problema 4. Fie ABC un triunghi și E, F două puncte arbitrare pe laturile (AB) , respectiv (AC) . Cercul circumscris triunghiului AEF intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC în punctul M . Fie D simetricul lui M față de dreapta EF și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Demonstrați că $D \in BC$ dacă și numai dacă O se află pe cercul circumscris triunghiului AEF .

Soluție: Dacă $M = A$, adică cercurile sunt tangente în A , atunci omotetia de centru A care transformă cercul circumscris triunghiului AEF în cercul circumscris triunghiului ABC transformă segmentul $[EF]$ într-un segment paralel cu acesta, $[BC]$. Atunci $D \in BC$ dacă și numai dacă $[EF]$ este linia mijlocie ceea ce este echivalent cu $AEOF$ inscriptibil.

Să presupunem în continuare că M se găsește pe arc mic AB . Atunci $m(\angle AEF) = m(\angle AMF) < m(\angle AMC) = m(\angle ABC)$, deci există $\{G\} = EF \cap BC$ și $B \in (GC)$. Se știe că cercurile circumscrise triunghiurilor ABC , AEF , EBG și FCG au un punct comun, punctul lui Miquel al patrulaterului complet $BCFEAG$. Cum cercurile circumscrise triunghiurilor ABC și AEF se taie a doua oară în M , rezultă că patrulaterul $MGBE$ și $MFCG$ sunt inscriptibile. Atunci:

$D \in BC \Leftrightarrow \angle MGE \equiv \angle CGE \Leftrightarrow m(\angle AEM) = 2m(\angle ABM) = m(\angle AOM) \Leftrightarrow O$ aparține cercului circumscris triunghiului AEF .



Faptul că patrulaterul $MGBE$ este inscriptibil poate fi justificat ușor și fără a invoca punctul lui Miquel (demonstrând practic teorema):

$m(\angle EGB) = m(\angle EBC) - m(\angle BEG) = m(\angle ABC) - m(\angle AEF) = m(\angle AMC) - m(\angle AMF) = m(\angle FMC)$ deci patrulaterul $MFCG$ este inscriptibil.

Apoi, $m(\angle BMC) = m(\angle BAC) = m(\angle EAF) = m(\angle EMF)$, de unde rezultă că $m(\angle EGB) = m(\angle BME)$, deci $m(\angle BME) = m(\angle BGE)$, ceea ce arată că patrulaterul $GBEM$ este inscriptibil.

Al cincilea test de selecție pentru OBMJ
București, 17 mai 2018

Problema 1. Fie p un număr prim mai mare ca 5 și $S = \{p - n^2 \mid n \in \mathbb{N}, n^2 < p\}$. Demonstrați că S conține două elemente a și b astfel încât $1 < a < b$ și a divide b .

baraj Argentina

Soluție:

Vom arăta că cel mai mic element al lui S care e mai mare ca 1 divide un element mai mare al lui S . Dacă p este de forma $m^2 + 1$ cu $m \in \mathbb{N}$, arătăm că $p - (m - 1)^2 = 2m$ divide $p^2 - 1 = m^2$. Într-adevăr, cum m este par, rezultă că $2m \mid m^2$.

Dacă p nu este de forma $m^2 + 1$, el nu este nici de forma $m^2 + 2m$ (acesta este număr compus căci $m > 1$), deci $m^2 + 1 < p < m^2 + 2m$ pentru un anumit $m \in \mathbb{N}$ ($m \geq 2$). Arătăm că $p - m^2$, care este un element mai mare ca 1 al lui S , divide un element mai mare al lui S . Condiția ca $p - m^2$ să dividă un număr de forma $p - n^2$ cu $n \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$ este echivalentă cu $p - m^2$ divide unul din numerele $m^2 - 1^2, m^2 - 2^2, \dots, m^2 - (m - 1)^2$. Fiind mai mic ca $2m$, $p - m^2$ divide unul din următoarele $2m - 1$ numere consecutive: $1, 2, \dots, m - 1, m, m + 1, \dots, 2m - 1$. Dacă singurul din aceste numere pe care $p - m^2$ îl divide este m , adică $p - m^2$ nu divide niciunul din numerele $1, 2, \dots, m - 1$, atunci $p - m^2 \geq m$. Dar pe de altă parte, $p - m^2 \leq m$. Rezultă că $p - m^2 = m$, adică $p = m(m + 1)$, care însă este număr compus. Rezulta că $p - m^2$ divide unul din numerele unul din următoarele numere: $1, 2, \dots, m - 1, m + 1, 2m - 1$, deci una din diferențele $m^2 - 1^2, m^2 - 2^2, \dots, m^2 - (m - 1)^2$.

Problema 2. Fie k un număr real, cu $k > 2$.

a) Arătați că pentru orice numere pozitive x, y și z are loc inegalitatea

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} > 2\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xy+yz+zx}}.$$

b) Demonstrați că există numere pozitive x, y și z pentru care

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} < k\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xy+yz+zx}}.$$

Leonard Giugiuc

Soluție:

a) Avem $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} > 2\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xy+yz+zx}} \Leftrightarrow$
 $x+y+z + \sqrt{x^2+xy+yz+zx} + \sqrt{y^2+xy+yz+zx} + \sqrt{z^2+xy+yz+zx} >$
 $2 \cdot \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xy+yz+zx}$. Dar
 $\sqrt{x^2+xy+yz+zx} > x$, $\sqrt{y^2+xy+yz+zx} > y$ și $\sqrt{z^2+xy+yz+zx} > z$,
 de unde $x+y+z + \sqrt{x^2+xy+yz+zx} + \sqrt{y^2+xy+yz+zx} +$
 $\sqrt{z^2+xy+yz+zx} > 2(x+y+z)$. Este suficient să arătăm că

$$x+y+z \geq \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xy+yz+zx},$$

adică

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) \geq (x+y)(y+z)(z+x).$$

Efectuând calculele se ajunge la $xyz \geq 0$, ceea ce este evident adevărat.

b) Fie $z = 1$. Căutăm $x, y > 0$ cu $y = x$ astfel încât

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} < k\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xy+yz+zx}},$$

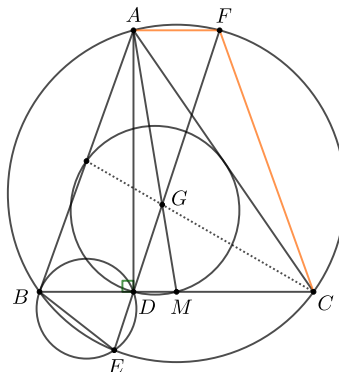
adică $2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x} < k\sqrt{\frac{2(x+1)^2}{x+2}}$, sau $\sqrt{\frac{x+2}{2(x+1)}} \left(2 + \sqrt{\frac{2x}{x+1}}\right) < k$.

Cum $\sqrt{\frac{x+2}{2(x+1)}} < 1$, este suficient să găsim x pentru care $2 + \sqrt{\frac{2x}{x+1}} < k$, adică
 $\sqrt{\frac{2x}{x+1}} < k - 2$, sau, echivalent, $\frac{2x}{x+1} < (k-2)^2$. Notând $t = (k-2)^2 > 0$,
 condiția de mai sus este îndeplinită de orice $x > 0$ dacă $t \geq 2$, iar dacă $t < 2$
 ea revine la $x < \frac{t}{2-t}$. Deoarece $\frac{t}{2-t} > 0$, există numere x, y, z care satisfac
 condițiile din enunț.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic în care $AB < AC$, G centrul său de greutate și D piciorul înălțimii din A . Dreapta DG intersectează arcul mic BC al cercului circumscris triunghiului ABC în punctul E . Arătați că dreapta AB este tangentă cercului circumscris triunghiului BDE .

Soluție: Fie F celălalt punct de intersecție a dreptei DG cu cercul circumscris triunghiului ABC . Concluzia este echivalentă cu $\angle BEF \equiv \angle ABC$, deci cu congruența arcelor AC și BF , ceea ce revine la congruența arcelor AB și FC , deci la $AF \parallel BC$ (cu alte cuvinte la $ABCF$ trapez isoscel). Se știe că omotetia de centru G și raport

$-1/2$ duce cercul circumscris în cercul lui Euler. Cum D se află pe cercul lui Euler, iar F pe cercul circumscris, iar punctele D , G și F sunt coliniare, omotetia de mai sus duce punctul F în punctul D . Dar o omotetie duce un segment într-unul paralel cu acesta, deci ea duce segmentul $[AF]$ în segmentul $[MD]$ (M este mijlocul laturii $[BC]$). Rezultă că $AF \parallel MD$, deci $AFCB$ este un trapez inscriptibil, adică unul isoscel, de unde concluzia.



Altă finalizare: (*Mircea Fianu*)

Fie H ortocentrul triunghiului și N și P simetricele lui H față de D , respectiv M . Se știe că ambele puncte se află pe cercul circumscris triunghiului ABC , P fiind diametral opusul lui A . Dacă Q este intersecția perpendicularei din P pe BC cu cercul circumscris lui ABC , atunci $ANPQ$ este dreptunghi, deci $AQ \parallel NP \parallel DM$ și $AQ = NP = 2DM$. Așadar $\angle QAG \equiv \angle GMD$ și $\frac{AQ}{DM} = 2 = \frac{AG}{GM}$, deci triunghiurile QAG și DMG sunt asemenea, deci D, G, Q sunt coliniare. Rezultă că $Q = F$, de unde concluzia.

Problema 4. În n cutii transparente se introduc bile roșii și bile albastre. Trebuie alese 50 de cutii astfel încât ele să conțină împreună cel puțin jumătate din bilele roșii și cel puțin jumătate din bilele albastre. Este întotdeauna posibilă o asemenea alegere indiferent de numărul bilelor și de modul în care au fost distribuite în cutii dacă:

- a) $n = 100$;
- b) $n = 99$?

Soluție:

a) La 100 cutii: în 25 de cutii pun câte o bilă roșie, iar în celelalte 75 câte o bilă albastră. Pentru a alege cel puțin jumătate din bilele roșii trebuie alese 13 cutii care conțin bile roșii, iar pentru a alege cel puțin jumătate din bilele albastre, trebuie să alegem cel puțin 38 de cutii care conțin bile albastre, deci cel puțin 51 de cutii în total. Prin urmare, dacă avem 100 de cutii, este posibil să nu putem alege 50 care

să conțină cel puțin jumătate din totalul bilelor de fiecare culoare.

1 și 75 cu câte o bilă de culoarea 2. trebuie alese cel puțin 13 din primele și 38 din următoarele, adică 51.

b) Demonstrăm prin inducție că dacă avem $2n + 1$ cutii, atunci putem alege $n + 1$ dintre ele astfel încât să avem cel puțin jumătate din bilele de fiecare culoare.

Pentru $n = 1$: dacă n-am putea alege două cutii, atunci cea care rămâne are majoritatea bilelor roșii sau majoritatea bilelor albastre. Dar există cel mult câte o asemenea alegere pentru fiecare culoare și 3 cutii disponibile, deci există cel puțin o cutie care nu are nici majoritatea roșiilor, nici majoritatea albastrelor. Alegând celelalte două cutii, deținem cel puțin jumătate din bilele din fiecare culoare.

Pasul de inducție. Spunem că două cutii sunt comparabile dacă una din ele are cel puțin la fel de multe bile din fiecare culoare ca cealaltă. Dacă există două cutii comparabile, le eliminăm și aplicăm ipoteza de inducție celor $2n - 1$ cutii rămase, apoi completăm cele n cutii alese cu cutia mai mare dintre cele două comparabile. Dacă nicioare două cutii nu sunt comparabile, notăm cu a_i , b_i numărul de bile roșii, respectiv albastre din cutia i . Reordonând eventual cutiile, o să avem $a_1 > a_2 > \dots > a_{99}$ și $b_1 < b_2 < \dots < b_{99}$. Alegem cutiile de rang impar. Acestea conțin împreună cel puțin jumătate din bilele din fiecare culoare.