

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 18 martie 2017

CLASA a VII-a

Problema 1. Se consideră numărul natural $n \geq 3$ cu proprietatea că $3n + 1$ este pătrat perfect. Arătați că există trei numere naturale nenule a, b, c astfel încât numărul

$$x = \sqrt{1 + \frac{3n + 1}{a^2 + b^2 + c^2}}$$

să fie natural.

Problema 2. Fie $E(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{x+1}{y+1} + \frac{x+2}{y+2}$.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $E(x, y) = 3$.

b) Arătați că există o infinitate de numere naturale n pentru care ecuația $E(x, y) = n$ are soluții în mulțimea numerelor naturale nenule.

Problema 3. Pe latura $[CD]$ a pătratului $ABCD$ se consideră punctul E astfel încât $m(\sphericalangle ABE) = 60^\circ$, iar pe semidreapta $(BA$ se ia punctul F astfel încât $[BE] \equiv [BF]$. Se notează cu M punctul de intersecție al dreptelor EF și AD .

a) Arătați că $m(\sphericalangle BME) = 75^\circ$.

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC , cu $m(\sphericalangle A) < m(\sphericalangle C)$. Punctul E aparține bisectoarei interioare a unghiului B astfel încât $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle ECB$. Fie D un punct pe dreapta BC astfel încât $B \in (CD)$ și $[BD] \equiv [AB]$. Arătați că mijlocul M al segmentului $[AC]$ este situat pe dreapta DE .