



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a XI-a

Problema 1. Se consideră matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $X^{2023} = X^{2022}$. Demonstrați că $X^3 = X^2$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie un număr natural $p \geq 2$. Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin $x_1 = a > 0$ și relația de recurență $x_{n+1} = x_n + \left\lceil \frac{p}{x_n} \right\rceil$, $n \in \mathbb{N}^*$, este convergent și determinați limita sa în funcție de valorile parametrului a . Notăție: $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

Problema 3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea $A^T = -A$, unde A^T este transpusa matricei A .

- a) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $A^2 = O_n$, arătați că $A = O_n$.
- b) Dacă n este un număr natural impar și există $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât matricea A este adjuncta matricei B , arătați că $A^2 = O_n$.

Problema 4. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde f este continuă. Presupunem că, pentru oricare numere reale $a < b < c$, există un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ convergent la b pentru care există $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$ și are loc relația

$$f(a) < \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) < f(c).$$

- a) Dați un exemplu de astfel de funcții, pentru care g este discontinuă în orice punct real.
- b) Arătați că, dacă g este monotonă, atunci $f = g$.

*Timp de lucru 3 ore.**Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*