

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Județeană și a Municipiului București, 18 martie 2017
CLASA a VIII-a

Problema 1.

- a) Fie $m, n, p \in \mathbb{N}$, $m > n$, astfel încât $\sqrt{m} - \sqrt{n} = p$. Demonstrați că m și n sunt pătrate perfecte.
- b) Determinați numerele $\overline{abcd}$ care verifică egalitatea

$$\sqrt{\overline{abcd}} - \sqrt{\overline{acd}} = \overline{bb}.$$

Problema 2. Fie $ABCD A' B' C' D'$ un cub de latură a . Notăm cu M și P mijloacele muchiilor $[AB]$, respectiv $[DD']$.

- a) Demonstrați că $MP \perp A'C$;
- b) Calculați distanța dintre dreptele MP și $A'C$.

Problema 3.

- a) Fie $x \in [1, \infty)$. Demonstrați că $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \geq 0$.
- b) Fie $a, b \in [1, \infty)$. Determinați minimul expresiei $ab(a + b - 10) + 8(a + b)$.

Problema 4. Fie $ABCD A' B' C' D'$ un cub de latură 1. O furnică parcurge un drum pe fețele cubului, pornind din A și terminând în C' . Deplasarea se realizează doar pe muchiile cubului sau pe diagonalele fețelor sale. Știind că drumul nu trece prin niciun punct de două ori, determinați lungimea maximă a unui asemenea drum.