



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Finală, Târgu Mureș, 20 aprilie 2016
CLASA a 9-a

Subiecte

Problema 1. Un triunghi ABC are ortocentrul H diferit de vârfuri și de centrul O al cercului circumscris. Notăm M , N , P centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC , HCA , respectiv HAB . Demonstrați că dreptele AM , BN , CP și OH sunt concurente.

Problema 2. Fie $n \geq 2$ un număr natural și $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale strict pozitive astfel încât $a_1 \leq a_2$, $a_1 + a_2 \leq a_3$, $a_1 + a_2 + a_3 \leq a_4, \dots$, $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \leq a_n$. Arătați că

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq \frac{n}{2}.$$

Când are loc egalitatea ?

Problema 3. a) Demonstrați că 7 nu poate fi scris ca sumă de trei pătrate de numere raționale.

b) Fie a un număr rațional care poate fi scris ca sumă de trei pătrate de numere raționale. Arătați că a^m poate fi scris ca sumă de trei pătrate de numere raționale, oricare ar fi numărul natural nenul m .

Problema 4. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care au proprietatea

$$f(a^2) - f(b^2) \leq (f(a) + b)(a - f(b)), \quad \text{oricare ar fi } a, b \in \mathbb{R}.$$