



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Târgu Mureș, aprilie 2024

CLASA a IX-a – subiecte

Problema 1. Pe latura (BC) a triunghiului ABC se consideră punctele D și E , cu D între B și E .

Despre un punct R al segmentului (AE) vom spune că este *remarcabil* dacă dreptele PQ și BC sunt paralele, unde $\{P\} = DR \cap AC$, iar $\{Q\} = CR \cap AB$. Despre un punct R' al segmentului (AD) vom spune că este *remarcabil* dacă dreptele $P'Q'$ și BC sunt paralele, unde $\{P'\} = BR' \cap AC$, iar $\{Q'\} = ER' \cap AB$.

a) Dacă pe segmentul (AE) există un punct *remarcabil*, arătați că orice punct al segmentului (AE) este *remarcabil*.

b) Dacă fiecare dintre segmentele (AD) și (AE) conține câte un punct *remarcabil*, demonstrați că $BD = CE = \varphi \cdot DE$, unde $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ este numărul de aur.

Problema 2. Fie a și b două numere reale din intervalul $(0, 1)$, astfel încât a este număr rațional și

$$\{na\} \geq \{nb\}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n.$$

Demonstrați că $a = b$.

(Am notat cu $\{x\}$ partea fracționară a numărului real x .)

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$(f(x) - y) \cdot f(x + f(y)) = f(x^2) - yf(y),$$

oricare ar fi numerele reale x și y .

Problema 4. Fie a un număr natural nenul dat. Considerăm șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_n = \frac{1}{1 + na}$, oricare ar fi numărul natural nenul n .

Demonstrați că, oricare ar fi numărul natural $k \geq 3$, există numere naturale nenule $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ astfel încât numerele $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.