



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etape Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a IX-a

Problema 1. Se consideră a și b numere naturale nenule. Demonstrați că ecuația

$$x^2 + (a + b)^2 x + 4ab = 1$$

are soluții raționale dacă și numai dacă $a = b$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A , astfel încât A' este mijlocul ipotenuzei, M mijlocul înălțimii AD , $D \in (BC)$ și $\{P\} = BM \cap AA'$.

Dacă notăm $\alpha = m(\widehat{PCB})$, să se demonstreze că

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin C \cdot \cos C.$$

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care există funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) + f(y) = [g(x + y)],$$

oricare ar fi x, y numere reale.

(Am notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a .)

Problema 4. Fie a, b, c, d numere naturale nenule, cu $a < b < c < d$ și $ad = bc$.
Demonstrați că

$$2a + \sqrt{a} + \sqrt{d} < b + c + 1.$$

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.