

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapă Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2022****CLASA a VI-a**

Problema 1. Considerăm numerele naturale $n - 1$, $2n - 1$ și $n^2 + 3$, unde $n \geq 3$ este un număr natural.

a) Arătați că există o singură valoare a lui n pentru care toate numerele considerate sunt prime.

b) Arătați că există o infinitate de valori ale lui n pentru care toate numerele considerate sunt compuse.

Gazeta Matematică

Problema 2. Determinați perechile (A, B) de mulțimi care au elementele numere naturale nenule și care verifică simultan următoarele proprietăți:

- fiecare din mulțimile A și B are trei elemente;
- mulțimea $A \cap B$ are exact un element;
- $6 \in A$ și $12 \in B$;
- dacă $x, y \in A$ și $x \neq y$, atunci $x \cdot y \in B$.

Problema 3. Determinați numerele naturale nenule a, b, c, d pentru care $a \leq b \leq c$ și

$$2^a + 2^b + 2^c = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot d.$$

Problema 4. Considerăm triunghiul ABC cu unghiul $\angle BAC$ ascuțit. Construim în exteriorul triunghiului punctele D și E astfel încât $AD = AC$, $AE = AB$, D și B sunt de aceeași parte a dreptei AC , E și C sunt de aceeași parte a dreptei AB și $\angle DAC = \angle BAE = 120^\circ + \frac{2}{3}\angle BAC$. Fie P intersecția dreptelor BE și CD . Demonstrați că:

- dreptele AE și CD sunt perpendiculare;
- dreptele PA și DE sunt perpendiculare.

*Timp de lucru 2 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*