



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Iași, 16 aprilie 2022

CLASA a VIII-a

Problema 1. a) Arătați că, dacă $a, b \in [1, \infty)$, atunci $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$.

b) Fie $x, y, z \in [0, \infty)$, cu proprietatea că $2x + 2y + 2z + xy + yz + zx = 9$.
Arătați că:

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{y^2 + 2y + 2} + \frac{1}{z^2 + 2z + 2} \geq \frac{3}{5}.$$

Problema 2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|ax + b| \leq 1$, pentru orice $x \in [-1, 1]$.

a) Arătați că $|a^2 + ab + 2b| \leq 2$.

b) Aflați numerele a și b pentru care $|a^2 + ab + 2b| = 2$.

Problema 3. În interiorul cubului $ABCD A' B' C' D'$ se consideră piramida patrulateră regulată $SABCD$ cu baza $ABCD$, astfel încât $\angle((SA'B'), (SC'D')) = 30^\circ$. Fie punctul M pe latura $A'D'$ pentru care $\angle A'B'M = 30^\circ$.

a) Aflați unghiul dintre apotema piramidei $SABCD$ și planul (ABC) .

b) Determinați tangenta unghiului dintre planele (MAB') și (SAB) .

Problema 4. Se consideră numărul natural n , cu $n \geq 2$. Spunem că numărul S este *special*, dacă pentru orice scriere a lui n sub forma $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, cu $k, n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$ și $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$, există numerele $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}$, astfel încât $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ și $a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_k n_k = S$.

a) Arătați că numărul $n^2 - 2n$ **nu** este special.

b) Aflați toate numerele speciale.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.