

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, 4 aprilie 2018
Clasa a X-a

Subiecte

Problema 1. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și numerele $a_1, a_2, \dots, a_n \in (1, \infty)$. Demonstrați că funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin relația

$$f(x) = (a_1 a_2 \dots a_n)^x - a_1^x - a_2^x - \dots - a_n^x,$$

pentru orice $x \in [0, \infty)$, este strict crescătoare.

Problema 2. Triunghiul ABC este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, 1)$. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor OBC , OAC și respectiv OAB . Demonstrați că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă $AG_1 + BG_2 + CG_3 = 4$.

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Demonstrați că, pentru orice numere complexe $a_1, a_2, \dots, a_n$ și $b_1, b_2, \dots, b_n$, următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $\sum_{k=1}^n |z - a_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n |z - b_k|^2$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$;

b) $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k$ și $\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n |b_k|^2$.

Problema 4. Fie $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Pentru numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n$, notăm $S_0 = 1$ și

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k},$$

suma tuturor produselor de câte k numere alese dintre $a_1, a_2, \dots, a_n$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Determinați numărul n -uplurilor $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pentru care are loc relația:

$$(S_n - S_{n-2} + S_{n-4} - \dots)^2 + (S_{n-1} - S_{n-3} + S_{n-5} - \dots)^2 = 2^n S_n.$$