



Problema urat

(autor prof. Adrian Panaete – C.N. „A.T.Laurian” Botoșani)

Se observă că înălțimile scândurilor unui gard formează o permutare. Problema cere de fapt permutările care au suma diferențelor între 2 termeni consecutivi maximă.

Fie $p_1, p_2, \dots, p_n$ o și $m = (n+1)/2$ media aritmetică a înălțimii gardurilor.

Notăm cu $G[p]$ gradul de urâtenie al gardului.

$G[p] = |p_1 - p_2| + |p_2 - p_3| + \dots + |p_{i-1} - p_i| + |p_i - p_{i+1}| + \dots + |p_{n-1} - p_n|$.

Se observă că oricare termen al permutării cu excepția lui p_1 și p_n intervin în exact 2 dintre cei $n-1$ termeni ai sumei.

Fie $p_i = x$ și $p_{i+1} = y$ avem 6 cazuri

1. $x \leq y \leq m \Rightarrow |x - y| = y - x = m - x - (m - y) = +|m - x| - |m - y|$
2. $x \leq m \leq y \Rightarrow |x - y| = y - x = m - x + (y - m) = +|m - x| + |m - y|$
3. $m \leq x \leq y \Rightarrow |x - y| = y - x = y - m - (x - m) = -|m - x| + |m - y|$
4. $y \leq x \leq m \Rightarrow |x - y| = x - y = m - y - (m - x) = -|m - x| + |m - y|$
5. $y \leq m \leq x \Rightarrow |x - y| = x - y = x - m + (m - y) = +|m - x| + |m - y|$
6. $m \leq y \leq x \Rightarrow |x - y| = x - y = x - m - (y - m) = +|m - x| - |m - y|$

Deducem că pentru fiecare termen din sumă putem scrie $|x - y| = \pm |m - x| \pm |m - y|$. Deci

$G[p] = \pm |m - p_1| \pm |m - p_2| \pm |m - p_2| \pm |m - p_3| \pm \dots \pm |m - p_{n-2}| \pm |m - p_{n-1}| \pm |m - p_{n-1}| \pm |m - p_n|$
 $\leq |m - p_1| + |m - p_2| + |m - p_2| + |m - p_3| + \dots + |m - p_{n-2}| + |m - p_{n-1}| + |m - p_{n-1}| + |m - p_n|$



$$= 2 * (|m-p_1| + |m-p_2| + |m-p_3| + \dots + |m-p_n|) - |m-p_1| - |m-p_n|$$

$$= 2 * (|m-1| + |m-2| + |m-3| + \dots + |m-n|) - |m-p_1| - |m-p_n|$$

Pentru a maximiza valoarea se observă că p_1 și p_n ar trebui alese cele mai apropiate de medie.

Pentru $n=2*k$ (n par) media este $m=(n+1)/2=k+1/2$ deci p_1 și p_n se vor alege k și $k+1$.

Pentru $n=2*k+1$ (n impar) media este $m=(n+1)/2=k+1$ deci una dintre valorile p_1 și p_n va fi obligatoriu $k+1$ iar cealalta va fi una dintre valorile k sau $k+2$.

Se deduce că pentru orice n (par sau impar) un majorant al lui $G[p]$ independent de permutare va fi $MAX=2 * (|m-1| + |m-2| + |m-3| + \dots + |m-n|) - 1$.

Cerința a.

Pentru ca o permutare să aibă $G[p]=MAX$ va trebui să îndeplinească două condiții

- I. Oricare doi termeni consecutivi să se găsească în cazurile 2 sau 4 din cele șase cazuri descrise mai sus $\Rightarrow$ permutarea trebuie să alterneze valorile mai mici decât media cu valorile mai mari decât media
- II. Primul și ultimul termen din permutare să fie alese cele mai apropiate posibil de media $m=(n+1)/2$

Există permutări cu aceste proprietăți deci MAX este valoarea cerută la punctul a. al problemei. Definitivând calculul lui MAX se poate deduce formula **$MAX=[n^2/2]-1$**

Cerința b.

În cazul **$n=2*k$** avem 2 tipuri de permutări

Cele care au $p_1=k$ și $p_n=k+1$ se obțin prin permutarea valorilor $1, 2, 3, \dots, k-1$ pe pozițiile impare și a valorilor $k+2, k+3, \dots, 2*k$ pe pozițiile pare.



Cele care au $p_1=k+1$ și $p_n=k$ se obțin prin permutarea valorilor $1, 2, 3, \dots, k-1$ pe pozițiile pare și a valorilor $k+2, k+3, \dots, 2*k$ pe pozițiile impare.

Cum de fiecare tip se vor obține $(k-1)! * (k-1)!$ **soluția va fi $2 * (k-1)! * (k-1)!$**

În cazul $n=2*k+1$ avem 4 tipuri de permutări

Cele care au $p_1=k$ și $p_n=k+1$ se obțin prin permutarea valorilor $1, 2, 3, \dots, k-1$ pe pozițiile impare și a valorilor $k+2, k+3, \dots, 2*k, 2*k+1$ pe pozițiile pare.

Cele care au $p_1=k+1$ și $p_n=k$ se obțin prin permutarea valorilor $1, 2, 3, \dots, k-1$ pe pozițiile impare și a valorilor $k+2, k+3, \dots, 2*k, 2*k+1$ pe pozițiile pare.

Cele care au $p_1=k+2$ și $p_n=k+1$ se obțin prin permutarea valorilor $1, 2, 3, \dots, k-1$ pe pozițiile pare și a valorilor $k+2, k+3, \dots, 2*k, 2*k+1$ pe pozițiile impare.

Cele care au $p_1=k+1$ și $p_n=k+2$ se obțin prin permutarea valorilor $1, 2, 3, \dots, k-1$ pe pozițiile pare și a valorilor $k+2, k+3, \dots, 2*k, 2*k+1$ pe pozițiile impare.

Cum de fiecare tip se vor obține $k! * (k-1)!$ **soluția va fi $4 * k! * (k-1)!$**

Cerința c.

Pentru $n=2*k$ (par) un exemplu de permutare cu $G[p] = \text{MAX}$ este

k , **$k+2$** , 1 , **$k+3$** , 2 , **$k+4$** , 3 , ..., **$2*k-1$** , $k-2$, **$2*k$** , $k-1$, **$k+1$**

Pentru $n=2*k+1$ (impar) un exemplu este

k , **$k+2$** , 1 , **$k+3$** , 2 , **$k+4$** , 3 , ..., **$2*k-1$** , $k-2$, **$2*k$** , $k-1$, **$2*k+1$** , $k+1$

